ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6},$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(8+1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(9+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot 9=\frac{9}{64},$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{4}\cdot\frac{9}{128}=\frac{9}{64}.$$

Άρα είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

Σημείωση. *Λόγω της μη ύπαρξης παρενθέσεων που να δίνουν προτεραιότητα στις πράξεις διαίρεσης και πολλαπλασιασμού θεωρούμε δεκτή και τη λύση της μορφής*

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{1}{96}=\frac{768}{27}.$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $\mathrm{A}<1<\mathrm{B}$, δηλαδή $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

(β) Λόγω της υπόθεσης $\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6}$, έχουμε ότι:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}=\frac{8}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma}{12}-\frac{3}{12}$$

$$=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{4}+\frac{4}{\beta}-\frac{2}{3}+\frac{\gamma}{6}-\frac{1}{4}=\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}-\frac{7}{6}=-1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου Α και 60 αυτοκίνητα τύπου Β. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου Α είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου Β είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου Α κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου Β κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Λύση

Το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α είναι $20\cdot\frac{30}{100}=6$ αυτοκίνητα, ενώ το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β είναι $(20+60)\cdot\frac{60}{100}=80\cdot\frac{60}{100}=48$ αυτοκίνητα. Επομένως από τα αυτοκίνητα τύπου Β πουλήθηκαν $48-6=42$ αυτοκίνητα.

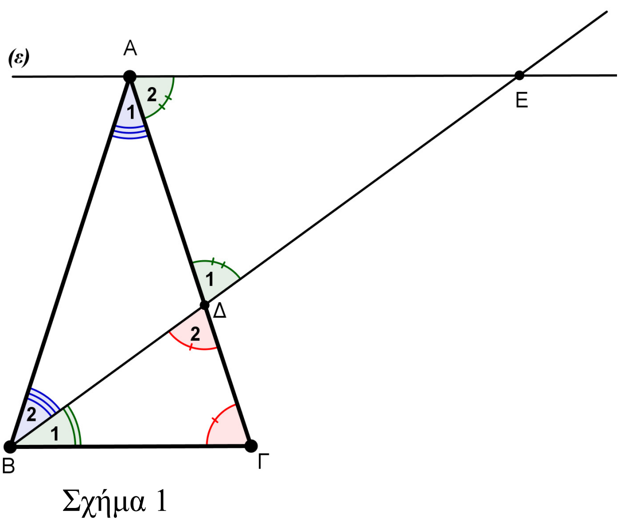
Από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Α κερδίζει $10000\cdot\frac{5}{100}=500$ ευρώ, ενώ από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Β κερδίζει $12000\cdot\frac{10}{100}=1200$ ευρώ. Επομένως από την πώληση των αυτοκινήτων ο έμπορος κέρδισε

$$6\cdot 500+42\cdot 1200=3000+50400=53400 \text{ ευρώ.}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}}=36^0$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή.

Λύση



Σχήμα 1

Το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι 180^o Επειδή όμως ισχύει $\hat{\text{Α}}=36^o$, θα έχουμε: $\hat{\text{Β}}=\hat{\Gamma}=72^o$.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Β}}$, οπότε $\hat{\text{Β}}_1=\hat{\text{Β}}_2=\frac{\hat{\text{Β}}}{2}=\frac{72^o}{2}=36^o$.

Επειδή τώρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 36^o$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ισχύει $\hat{B}_1 = 36^o$ και $\hat{\Gamma} = 72^o$. Άρα $\hat{\Delta}_2 = 72^o$.

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^o$, προκύπτει ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.

Από την ισότητα τέλος των γωνιών $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 72^o$ (ως κατά κορυφή), προκύπτει η ισότητα $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 = 72^o$. Επομένως το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{E}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την BE. Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = 36^o$, οπότε θα είναι και $\hat{B}_2 = \hat{E}$. Επομένως και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{\alpha\gamma\beta} = 100\alpha + 10\gamma + \beta$.

(ii) Το άθροισμα των ψηφίων β, γ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x + 12 < 5x - 1$.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$A - B = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow 9 \cdot (\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση του ερωτήματος (ii) έχουμε:

$$3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 3x - 5x < -12 - 1 \Leftrightarrow -2x < -13 \Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}.$$

Άρα, ο μικρότερος ακέραιος που είναι λύση της είναι ο 7, οπότε έχουμε:

$$\beta + \gamma = 7. \qquad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$2\beta = 10,\ 2\gamma = 4 \Leftrightarrow \beta = 5,\ \gamma = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να σκεφθούμε ως εξής: Επειδή οι ακέραιοι β, γ είναι ψηφία με διαφορά $\beta - \gamma = 3$ θα είναι $\beta > \gamma$ και επειδή επιπλέον έχουν άθροισμα 7, οι δυνατές τιμές τους είναι

$$\beta = 7,\ \gamma = 0 \text{ ή } \beta = 6,\ \gamma = 1 \text{ ή } \beta = 5,\ \gamma = 2 \text{ ή } \beta = 4,\ \gamma = 3.$$

Επειδή πρέπει $\beta - \gamma = 3$ οι αποδεκτές τιμές είναι $\beta = 5,\ \gamma = 2$.

Άρα ο θετικός ακέραιος Α θα έχει τη μορφή $A = \overline{\alpha 52}$ με άθροισμα ψηφίων $\alpha + 7$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο Α διαιρείται με το 3, πρέπει και αρκεί ο ακέραιος $\alpha + 7$ να είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε, αφού το α είναι ψηφίο, οι κατάλληλες τιμές του είναι: $\alpha = 2$ ή $\alpha = 5$ ή $\alpha = 8$.

Επομένως, έχουμε $A = 252$ ή $A = 552$ ή $A = 852$