Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1.$$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-20,$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1\Leftrightarrow 2\cdot(2x+18)-(7-3x)=8\Leftrightarrow 4x+36-7+3x=8$$
$$\Leftrightarrow 7x+29=8\Leftrightarrow 7x=8-29\Leftrightarrow 7x=-21\Leftrightarrow x=-3.$$

(β) Για $\beta=-\frac{1}{3}$ η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)^{-3}-9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-20=\left(\frac{1}{\frac{1}{9}}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^{-3}-9\cdot\frac{1}{9}-20$$
$$=\left(9+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)^3-1-20=\left(\frac{81}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)-1-20=-\frac{82}{9}-1-20$$
$$=-\frac{82}{9}-\frac{9}{9}-\frac{180}{9}=-\frac{271}{9}.$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι α,β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha\le 10,\ \beta\ge 12\ \text{ και }\ (\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\le 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=3\alpha-2\beta$.

Λύση

Είναι $\alpha\le 10$, οπότε $\alpha-12<0$. Άρα, για να αληθεύει η ανίσωση $(\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\le 0$, αρκεί να ισχύει ότι: $40-2\beta\ge 0\Leftrightarrow 40\ge 2\beta\Leftrightarrow \beta\le 20$. Έτσι έχουμε:

$$0\le\alpha\le 10\ \text{ και }\ 12\le\beta\le 20\Rightarrow 0\le 3\alpha\le 30\ \text{ και }\ 24\le 2\beta\le 40$$
$$\Rightarrow 0\le 3\alpha\le 30\ \text{ και }\ -40\le -2\beta\le -24,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$-40\le \mathrm{A}=3\alpha-2\beta\le 6,$$

οπότε η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης Α είναι 6, ενώ η μικρότερη τιμή της είναι -40.

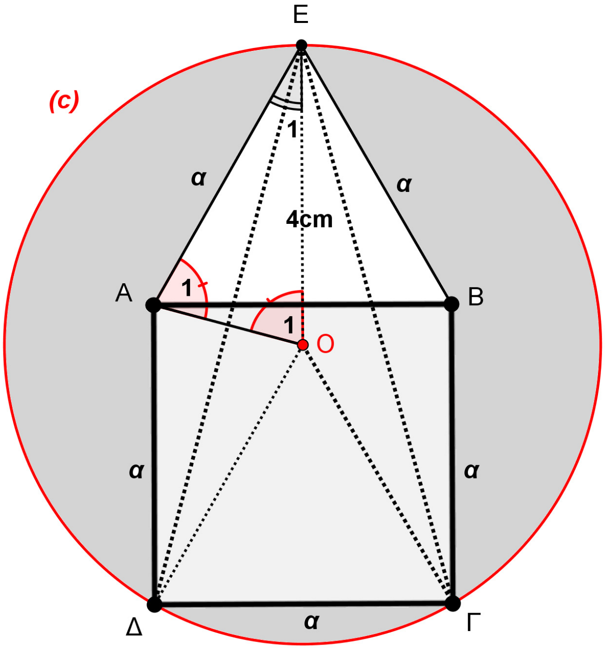
Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.
(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου.
(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΔΓΒΕ και εσωτερικά του κύκλου (c).

Λύση

(i) Στα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ ισχύουν: $ΑΕ = ΒΕ = \alpha$, $ΑΔ = ΒΓ = \alpha$ και $Ε\hat{Α}Δ = Ε\hat{Β}Γ = 90^o + 60^o = 150^o$.



Σχήμα 2

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα και κατά συνέπεια $ΕΔ = ΕΓ$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.

(ii) Εφόσον $ΕΔ = ΕΓ$, το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος ΔΓ (που ταυτίζεται με τη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ). Επίσης $ΕΑ = ΕΒ$, οπότε το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Άρα η ΟΕ είναι μεσοκάθετη της ΑΒ και κατά συνέπεια διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Ε}Β$ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΕΒ. Άρα είναι $\hat{Ε}_1 = 30^o$.

$$\left.\begin{array}{l} ΑΕ = ΑΔ = \alpha \\ ΟΕ = ΟΔ = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow ΟΑ \text{ μεσοκάθετη της } ΕΔ \Rightarrow ΟΑ \text{ διχοτόμος της } Δ\hat{Α}Ε \Rightarrow \hat{Α}_1 = 75^o.$$

Στο τρίγωνο ΑΟΕ έχουμε: $\hat{Α}_1 = 75^o$ και $\hat{Ε}_1 = 30^o$. Άρα $\hat{Ο}_1 = 75^o$, οπότε το τρίγωνο ΑΟΕ είναι ισοσκελές με $ΕΑ = ΕΟ = \alpha = 4cm$.

(iii) Το εμβαδόν του κύκλου (c) είναι: $Ε_c = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι: $Ε_{τετ} = 4^2 = 16$, ενώ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ είναι: $Ε_{τρ} = 4\sqrt{3}$. Άρα το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας είναι: $Ε = 16\pi - 16 - 4\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $Α = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $Α - Β = 198$, όπου $Β = \overline{\gamma\beta\alpha} = 100\gamma + 10\beta + \alpha$,

(ii) Η εξίσωση $\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}=1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=198 \Leftrightarrow 99\cdot(\alpha-\gamma)=198 \Leftrightarrow \alpha-\gamma=2. \qquad (1)$$

Η εξίσωση της πρότασης (ii) , αν $\gamma\neq 2\alpha$ και $x\neq 0$, γράφεται:

$$\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{x+\alpha-2\gamma}{x}=0 \Leftrightarrow (x+\alpha-2\gamma)\left(\frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\alpha-2\gamma=0 \text{ ή } \frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=2\gamma-\alpha \text{ ή } x=2\alpha-\gamma$$

Επειδή, λόγω της (ii) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι 4, έχουμε ότι

$$(2\gamma-\alpha)+(2\alpha-\gamma)=4 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=4, \qquad (2)$$

με τους περιορισμούς για τις παραμέτρους $\gamma\neq 2\alpha$ και $\alpha\neq 2\gamma$.

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$2\alpha=6,\ 2\gamma=2 \Leftrightarrow \alpha=3,\ \gamma=1$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί για την εξίσωση.

Άρα ο θετικός ακέραιος Α θα έχει τη μορφή $\mathrm{A}=\overline{3\beta 1}$ με άθροισμα ψηφίων $4+\beta$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο Α διαιρείται με το 9, πρέπει και αρκεί $4+\beta=\pi o\lambda.(9)$, οπότε, αφού το β είναι ψηφίο, η μοναδική δυνατή τιμή του είναι $\beta=5$.

Επομένως, ο ζητούμενος θετικός ακέραιος Α είναι ο 351.