Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x+\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-2|x|+1=2x+\alpha \Leftrightarrow x^2-2\left(|x|+x\right)+1-\alpha=0. \qquad (1)$$

Λόγω της παρουσίας της απόλυτης τιμής του x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $x\geq 0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-4x+1-\alpha=0, \qquad (2)$$

η οποία είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=16-4(1-\alpha)=4(3+\alpha)$.

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν, $\alpha\geq -3$. Για να διαπιστώσουμε πόσες από αυτές είναι δεκτές θεωρούμε το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών που είναι

$$\mathrm{P}=1-\alpha \text{ και } \mathrm{S}=4>0.$$

Έτσι, για την εξίσωση (2) έχουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες** μη αρνητικές, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$. Ειδικότερα, αν $\alpha=1$, τότε η εξίσωση έχει τις ρίζες $x=4$ και $x=0$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **μία** μόνο ρίζα μη αρνητική, τη $x=2+\sqrt{3+\alpha}$

(ii) $x<0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2+1-\alpha=0, \qquad (3)$$

η οποία έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, τη $x=-\sqrt{\alpha-1}$, αν $\alpha>1$.

Συνοπτικά, από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε για τη δεδομένη εξίσωση, τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $\alpha<-3$, η εξίσωση **δεν έχει ρίζες** στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, τις $x=2+\sqrt{3+\alpha}$, $x=-\sqrt{\alpha-1}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z&=8\\ x^2+y^2+z^2&=26\\ xy+xz&=(yz+1)^2. \end{aligned}$$

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=8\\ x^2+y^2+z^2=26\\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8\\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=26\\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8\\ xy+yz+zx=19\\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ xy+yz+zx=19 \\ 19-yz=(yz+1)^2 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ (yz)^2+3(yz)-18=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=-6 \text{ ή } yz=3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=-6 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)=16 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)=25 \\ yz=-6 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(8-x)=16 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(8-x)=25 \\ yz=-6 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+16=0 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+25=0 \\ yz=-6 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x=4 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+25=0\,(\text{αδύνατη στο } \mathbb{R}) \\ yz=-6 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4 \\ y+z=4 \\ yz=3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4 \\ z=4-y \\ y(4-y)=3 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4 \\ z=4-y \\ y^2-4y+3=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow(x,y,z)=(4,1,3) \text{ ή } (x,y,z)=(4,3,1).$$

Πρόβλημα 3

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=(\alpha+\beta)\gamma, \tag{1}$$

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}\ge\frac{(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma. \tag{2}$$

Η ισότητα στη (2) ισχύει, αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta$.
Άρα έχουμε

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<(\alpha+\beta)\gamma. \tag{3}$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\alpha\le\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}<(\beta+\gamma)\alpha, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\beta\le\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<(\gamma+\alpha)\beta. \tag{5}$$

Οι ισότητα στις (4) και (5) ισχύει αν, και μόνον αν, $\beta=\gamma$ και $\gamma=\alpha$, αντίστοιχα.
Από τις (3), (4) και (5) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε :.

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \le \frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} < 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \quad (6)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \quad (7)$$

οπότε από τις (6) και (7) προκύπτουν οι ζητούμενες ανισότητες.

Η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta=\gamma$, οπότε από τη σχέση $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Παρατήρηση. *Η δεύτερη ανισότητα είναι γνήσια από την κατασκευή της άσκησης με τους* α,β,γ *θετικούς πραγματικούς αριθμούς, λόγω της ισότητας* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$. *Στην περίπτωση που επιτρέψουμε οι* α,β,γ *να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, δίνοντας στην παραπάνω ισότητα τη μορφή* $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, *τότε η δεύτερη ανισότητα γίνεται*

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} \le 2,$$

όπου η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, ένας μόνον από τους α,β,γ *είναι μηδέν και οι άλλοι δύο αντίστροφοι.*

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο O και ακτίνα R. Από το σημείο A φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r=\mathrm{OM}$ (M είναι το μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο T, τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N και το κύκλο (c) στο σημείο N_1 (θεωρούμε $\mathrm{BN}<\mathrm{BM}$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K και το κύκλο (c) στο σημείο K_1 (θεωρούμε $\mathrm{\Gamma K}<\mathrm{\Gamma M}$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{BN}_1,\mathrm{\Gamma K}_1$ και AM περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Οι χορδές $\mathrm{AN}_1,\mathrm{AK}_1$ και $\mathrm{B\Gamma}$ του κύκλου (c), είναι εφαπτόμενες του κύκλου (c_1) στα σημεία T,Σ και M αντίστοιχα. Άρα οι ακτίνες $\mathrm{OT},\mathrm{O\Sigma}$ και OM του κύκλου (c_1), είναι κάθετες προς τις χορδές $\mathrm{AN}_1,\mathrm{AK}_1$ και $\mathrm{B\Gamma}$ του κύκλου (c) αντίστοιχα. Δηλαδή οι ακτίνες $\mathrm{OT},\mathrm{O\Sigma}$ και OM του κύκλου (c_1), είναι τα αποστήματα που αντιστοιχούν στις χορδές $\mathrm{AN}_1,\mathrm{AK}_1$ και $\mathrm{B\Gamma}$ του κύκλου (c). Τα αποστήματα $\mathrm{OT},\mathrm{O\Sigma}$ και OM είναι ίσα μεταξύ τους , αφού είναι ακτίνες του κύκλου (c_1).

Άρα $\mathrm{AN}_1=\mathrm{AK}_1=\mathrm{B\Gamma}$ (*) και τα σημεία $\mathrm{T},\Sigma,\mathrm{M}$ είναι τα μέσα των χορδών $\mathrm{AN}_1,\mathrm{AK}_1$ και $\mathrm{B\Gamma}$, αντίστοιχα. Από τους προηγούμενους συλλογισμούς, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{TA}=\mathrm{TN}_1=\Sigma\mathrm{A}=\Sigma\mathrm{K}_1 \quad (1)$$

Το σημείο N βρίσκεται εκτός του κύκλου (c_1) και NM,NT είναι τα εφαπτόμενα τμήματα, οπότε

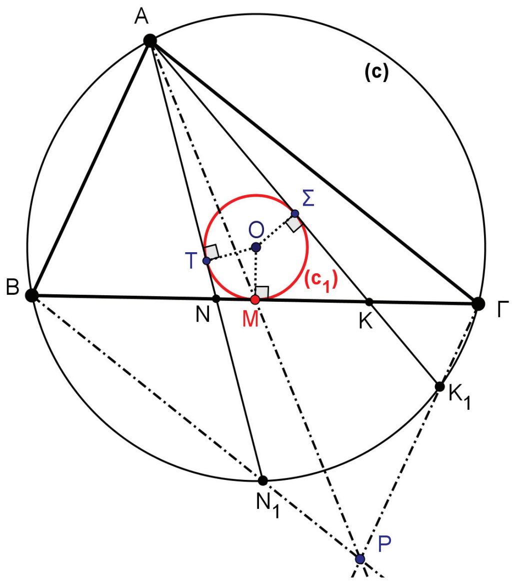
$$\mathrm{NM}=\mathrm{NT} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(1):\quad MB = TN_1 \\ (2):\quad NM = NT\end{array}\right\} \overset{(:)}{\Rightarrow} \frac{MB}{MN} = \frac{TN_1}{NT} \Rightarrow TM\ PBN_1 \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας και πάλι τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(1):\quad M\Gamma = TA \\ (2):\quad NM = NT\end{array}\right\} \overset{(:)}{\Rightarrow} \frac{M\Gamma}{NM} = \frac{TA}{NT} \Rightarrow TM\,//\,A\Gamma \qquad (4)$$



Σχήμα 4

Από τις (3) και (4) έχουμε $BN_1\ PA\Gamma$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\Gamma K_1\ PAB$. Αν λοιπόν P είναι η τομή των ευθειών BN_1 και ΓK_1, τότε το τετράπλευρο $ABP\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα οι ευθείες $BN_1, \Gamma K_1$ και AM θα συντρέχουν στο P.

(*) "Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα."
(Θεώρημα ΙΙΙ, Σελ.46, του Σχολικού βιβλίου της ΕΜΕ)