

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \frac{2^3}{31} \cdot \left(2^3 + 2^0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad \text{και} \quad B = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) : \left(\frac{8}{3^4} - \frac{2}{9^2} \right) + \frac{3}{2^4}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 11\alpha\beta\gamma \quad \text{και} \quad \alpha\beta\gamma \neq 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma = \frac{8-\alpha}{2\alpha} + \frac{12-\beta}{3\beta} + \frac{16-\gamma}{4\gamma}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$A = \frac{2^3}{31} \cdot \left(2^3 + 2^0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{31} \cdot \left(8 + 1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{31} \cdot \left(9 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{31} \cdot 9 = \frac{72}{31},$$

$$B = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) : \left(\frac{8}{3^4} - \frac{2}{9^2} \right) + \frac{3}{2^4} = \left(\frac{3}{12} - \frac{1}{12} \right) : \left(\frac{8}{81} - \frac{2}{81} \right) + \frac{3}{16} = \frac{1}{6} \cdot \frac{81}{6} + \frac{3}{16} = \frac{9}{4} + \frac{3}{16} = \frac{39}{16}.$$

Επειδή είναι $A - B = \frac{72}{31} - \frac{39}{16} = \frac{72 \cdot 16 - 39 \cdot 31}{31 \cdot 16} = \frac{1152 - 1209}{496} < 0$, έπεται ότι $A < B$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{8-\alpha}{2\alpha} + \frac{12-\beta}{3\beta} + \frac{16-\gamma}{4\gamma} = \frac{8}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2\alpha} + \frac{12}{3\beta} - \frac{\beta}{3\beta} + \frac{16}{4\gamma} - \frac{\gamma}{4\gamma} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Από την υπόθεση $6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 11\alpha\beta\gamma$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$ με διαίρεση και των δύο μελών της ισότητας με $6\alpha\beta\gamma \neq 0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{6\alpha\beta\gamma} = \frac{11\alpha\beta\gamma}{6\alpha\beta\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{11}{6},$$

οπότε η παράσταση Γ έχει τιμή

$$\Gamma = 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{13}{12} = 4 \cdot \frac{11}{6} - \frac{13}{12} = \frac{44}{6} - \frac{13}{12} = \frac{75}{12} = \frac{25}{4}.$$

Πρόβλημα 2

Ένας πελάτης αγόρασε από μία έκθεση αυτοκινήτων ένα αυτοκίνητο για το οποίο πλήρωσε με μετρητά το μισό της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου, ενώ για τα υπόλοιπα συμφωνήθηκε να πληρώσει με 24 μηνιαίες δόσεις των 500 ευρώ. Με αυτόν το διακανονισμό επιβαρύνθηκε με τόκους που συνολικά αντιστοιχούν στο 10% της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου. Να βρείτε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου και πόσα συνολικά θα πληρώσει συνολικά ο πελάτης.

Λύση.

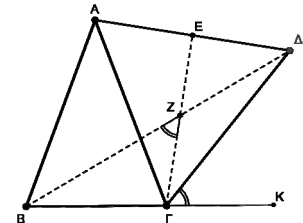
Αν υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι x , τότε, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 24 \cdot 500 &= x + \frac{10x}{100} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 12000 = x + \frac{x}{10} \Leftrightarrow 5x + 120000 = 10x + x \\ \Leftrightarrow 6x &= 120000 \Leftrightarrow x = \frac{120000}{6} = 20000. \end{aligned}$$

Άρα η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι $x = 20000$ ευρώ και ο πελάτης θα πληρώσει συνολικά $x + \frac{10x}{100} = \frac{11x}{10} = \frac{11 \cdot 20000}{10} = 22000$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

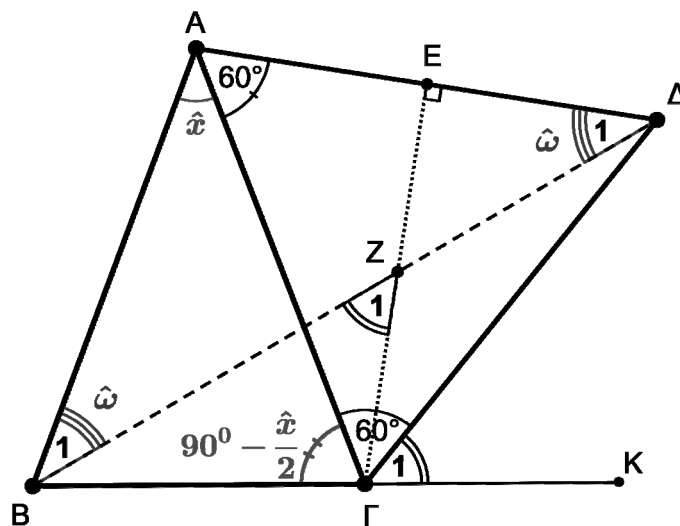
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$), το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο και E είναι το μέσο του $A\Delta$. Αν το K βρίσκεται στη προέκταση της $B\Gamma$ και οι $B\Delta, \Gamma E$ τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$ και $\hat{K}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$, είναι ίσες.



Λύση

Έστω $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{x}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ - \frac{\hat{x}}{2}. \quad (1)$$



Σχήμα 1

Από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, έχουμε: $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 60^\circ$. Οι γωνίες τώρα $\hat{\Gamma}$, $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}_1$ είναι διαδοχικές με την πρώτη και την τελευταία πλευρά τους αντικείμενες ημιευθείες, έχουμε ότι $\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 60^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{x}}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 30^\circ + \frac{\hat{x}}{2}. \quad (2)$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$, θέτουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\omega}$ και παίρνουμε:

$$2\hat{\omega} + \hat{x} + 60^\circ = 180 \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^\circ - \frac{\hat{x}}{2}. \quad (3)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο τέλος $E\Delta Z$, έχουμε:

$$\hat{Z}_1 = E\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = 30^\circ + \frac{\hat{x}}{2}. \quad (4)$$

Πρόβλημα 4

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο A που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο A όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο A .

Λύση

Το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \dots, 2012\}$ έχει 2012 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο A είναι της μορφής 5κ , όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \leq 5\kappa \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \kappa \leq \frac{2012}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \kappa \leq 402\frac{2}{5} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, \dots, 402\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο A είναι 402.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο A είναι της μορφής 8κ , όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \leq 8\kappa \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \kappa \leq \frac{2012}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \kappa \leq 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, \dots, 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο A είναι 251.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 5 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $E\text{ΚΠ}\{5, 8\} = 40$ που ανήκουν στο σύνολο A .

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$1 \leq 40\kappa \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{40} \leq \kappa \leq \frac{2012}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{40} \leq \kappa \leq 50\frac{12}{40} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, \dots, 50\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 5 και 8 μέσα στο σύνολο A είναι 50.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο A συνολικά $402 + 251 - 50 = 603$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $2012 - 603 = 1409$ στοιχεία.