

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237 \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{4\beta^2} \right)^3 + \frac{9\alpha - 20\beta^2}{\beta^2},$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \beta = 2^{-3}$.

(β) Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y} = \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η

παράσταση $K = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $K \leq 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Λύση

(α) Για $\alpha = \beta = 2^{-3}$ λαμβάνουμε $\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{2^{-3}}{(2^{-3})^2} = \frac{2^{-3}}{2^{-6}} = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$.

Η παράσταση A γράφεται:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237 \right) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} \right)^3 + 9 \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} - 20 = (8 + 237) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 8 \right)^3 + 9 \cdot 8 - 20 \\ &= 245 \cdot 2^3 + 72 - 20 = 245 \cdot 8 + 52 = 2012. \end{aligned}$$

(β) Από την υπόθεση έχουμε ότι $x = \alpha y$, οπότε η παράσταση γράφεται

$$K = \frac{2\alpha y y}{\alpha^2 y^2 + y^2} = \frac{2\alpha y^2}{(\alpha^2 + 1)y^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1},$$

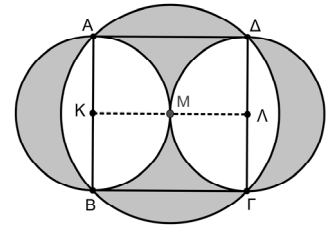
δηλαδή είναι ανεξάρτητη των x, y και εξαρτάται μόνο από το λόγο α . Επιπλέον, ισχύει

$$K = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο είναι αληθές. Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι 1 και λαμβάνεται όταν $\alpha - 1 = 0$, δηλαδή όταν $\alpha = 1$.

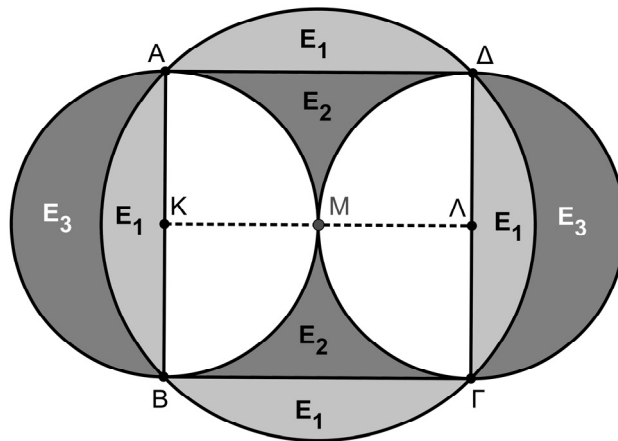
Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $K\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία A, B, Γ, Δ . Να υπολογιστεί συναρτήσει του R , το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Λύση

Επειδή είναι $AK = \Delta\Lambda$ και $AK \parallel \Delta\Lambda$, ως κάθετες στη διάκεντρο $K\Lambda$, το τετράπλευρο $AK\Lambda\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε θα είναι $A\Delta = K\Lambda = 2R$. Ομοίως προκύπτει ότι και το τετράπλευρο $KB\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο και ότι $B\Gamma = K\Lambda = 2R$. Επομένως, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά $2R$ και εμβαδό $(AB\Gamma\Delta) = 4R^2$.



Σχήμα 2

Το τρίγωνο AKM είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $KA = KM = R$. Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε: $MA = MB = M\Gamma = M\Delta = R\sqrt{2}$, δηλαδή ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $R\sqrt{2}$ και κατά συνέπεια το εμβαδό του θα είναι: $E = \pi(R\sqrt{2})^2 = 2\pi R^2$.

Τα εμβαδά των δύο μικτόγραμμων χωρίων $MA\Delta$ και $MB\Gamma$ είναι ίσα μεταξύ τους και το άθροισμά τους προκύπτει, αν από το εμβαδό του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδό των δύο μικρών ημικυκλίων (δηλαδή το εμβαδό του μικρού κύκλου).

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτουν οι σχέσεις:

$$2E_2 = (AB\Gamma\Delta) - \pi R^2 \Leftrightarrow 2E_2 = 4R^2 - \pi R^2 \Leftrightarrow E_2 = \left(\frac{4 - \pi}{2}\right)R^2.$$

Για τα εμβαδά των χωρίων E_3 έχουμε: $E_3 = \frac{\pi R^2}{2} - E_1$.

Άρα το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$2E_1 + 2E_2 + 2E_3 = 2E_1 + (4 - \pi)R^2 + \pi R^2 - 2E_1 = 4R^2.$$

Παρατήρηση

Το εμβαδό ενός από τα τέσσερα ίσα κυκλικά τμήματα του μεγάλου κύκλου είναι:

$$E_1 = \frac{E - (AB\Gamma\Delta)}{4} = \frac{2\pi R^2 - 4R^2}{4} = \frac{(\pi - 2)R^2}{2}.$$

Ο υπολογισμός όμως δεν είναι απαραίτητος γιατί απλοποιείται με τις πράξεις.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο A που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράψουμε από το σύνολο A όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3

και στη συνέχεια διαγράφουμε όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο A .

Λύση

Το σύνολο $A = \{101, 102, 103, \dots, 2012\}$ έχει $2012 - 100 = 1912$ στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο A είναι της μορφής $3k$, όπου k ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \leq 3k \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{3} \leq k \leq \frac{2012}{3} \Leftrightarrow 33\frac{2}{3} \leq k \leq 670\frac{2}{3} \Leftrightarrow k \in \{34, 35, \dots, 670\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο A είναι $670 - 33 = 637$.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο A είναι της μορφής $8k$, όπου k ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \leq 8k \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{8} \leq k \leq \frac{2012}{8} \Leftrightarrow 12\frac{5}{8} \leq k \leq 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow k \in \{13, 14, \dots, 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο A είναι $251 - 12 = 239$.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 3 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\text{ΕΚΠ}\{3, 8\} = 24$ που ανήκουν στο σύνολο A .

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$101 \leq 24k \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{24} \leq k \leq \frac{2012}{24} \Leftrightarrow 4\frac{5}{24} \leq k \leq 83\frac{20}{24} \Leftrightarrow k \in \{5, 6, \dots, 83\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 3 και 8 μέσα στο σύνολο A είναι $83 - 4 = 79$.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο A συνολικά $637 + 239 - 79 = 797$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $1912 - 797 = 1115$ στοιχεία.

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x) = (\alpha x^2 + \beta x)(\gamma x^2 + \delta) + 4,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

$$\text{Έχουμε } P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = x^4 - 5x^2 + 4 \text{ και}$$

$$Q(x) = (\alpha x^2 + \beta x)(\gamma x^2 + \delta) + 4 = \alpha\gamma x^4 + \beta\gamma x^3 + \alpha\delta x^2 + \beta\delta x + 4.$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, αν, και μόνον αν, ισχύουν

$$\alpha\gamma = 1, \beta\gamma = 0, \alpha\delta = -5, \beta\delta = 0$$

$$\Leftrightarrow \{\beta = 0 \text{ ή } \gamma = 0\}, \{\beta = 0 \text{ ή } \delta = 0\}, \alpha\gamma = 1, \alpha\delta = -5.$$

Οι τιμές $\gamma = 0$ και $\delta = 0$ αποκλείονται γιατί δεν επαληθεύουν τις δύο τελευταίες εξισώσεις, οπότε λαμβάνουμε $\beta = 0, \gamma = \frac{1}{\alpha}, \delta = -\frac{5}{\alpha}, \alpha \neq 0$. Από την εξίσωση $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, με αντικατάσταση των τιμών των β, γ και δ προκύπτει η εξίσωση

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{5}{\alpha} = -3 \Leftrightarrow \alpha - \frac{4}{\alpha} = -3 \Leftrightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 + 3\alpha - 3 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha + 1) + 3(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 4) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \text{ ή } \alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -4$$

Επομένως οι τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -5 \text{ ή } \alpha = -4, \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{4}, \delta = \frac{5}{4}.$$