Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5.$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών με $x<0$ για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| = 5.$$

Λύση

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|a| \geq a, \quad (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \geq 0) \text{ και}$$

$$|a| \geq -a, \ (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \leq 0).$$

Άρα έχουμε

$$|x+y-1| \geq -(x+y-1), \quad |x+2| \geq x+2 \quad \text{και} \quad |y+2| \geq y+2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq -(x+y-1)+x+2+y+2=5.$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, και οι τρεις σχέσεις αληθεύουν ως ισότητες, δηλαδή, αν, και μόνον αν,

$$x+y-1 \leq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \geq 0 \quad \text{και} \quad y+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+y \leq 1 \quad \text{και} \quad x \geq -2 \quad \text{και} \quad y \geq -2.$$

Επειδή ζητάμε όλα τα ζεύγη των ακέραιων αριθμών (x, y) με $x<0$, για τα οποία ισχύει η ισότητα, έχουμε $x \in \{-2,-1\}$, $y \in \{-2,-1,0,1,2,....\}$, οπότε για να ισχύει η συνθήκη $x+y \leq 1$, πρέπει και αρκεί:

$$(x, y) \in \{(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-1,-2),(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,2)\}.$$

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^2(y^2-3y+2)<4y(y-1)(xy-2x+2y-y^2),$$

να αποδείξετε ότι: $|2y-3|<1$.

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& x^2(y^2-3y+2)<4y(y-1)(xy-2x+2y-y^2) \\
& \Rightarrow x^2(y^2-3y+2)-4y(y-1)(xy-2x+2y-y^2)<0 \\
& \Rightarrow x^2(y^2-3y+2)-4y(y-1)(y-2)x-4y(y-1)(2y-y^2)<0 \\
& \Rightarrow x^2(y^2-3y+2)-4y(y^2-3y+2)x+4y^2(y^2-3y+2)<0 \\
& \Rightarrow (y^2-3y+2)(x^2-4xy+4y^2) \leq 0 \Leftrightarrow (y^2-3y+2)(x-2y)^2<0 \\
& \Rightarrow y^2-3y+2<0, \text{ αφού ισχύει } (x-2y)^2 \geq 0, \\
& \Rightarrow (y-1)(y-2)<0 \Rightarrow 1<y<2.
\end{aligned}$$

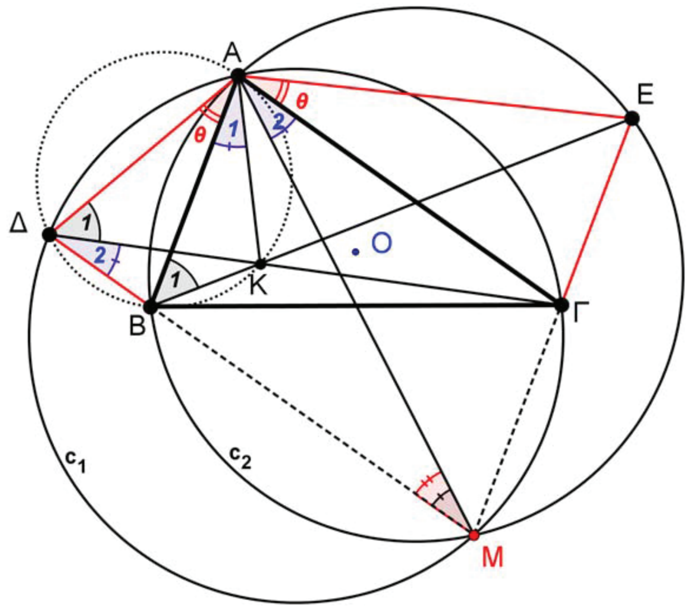
Από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$1<y<2 \Rightarrow 1-\frac{3}{2}<y-\frac{3}{2}<2-\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{2y-3}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow -1<2y-3<1 \Rightarrow |2y-3|<1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΔ$ ($ΑΒ = ΑΔ$) και $ΑΓΕ$ ($ΑΓ = ΑΕ$) με $Β\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Ε = \hat{\theta} < 90^\circ$. Οι $ΒΕ$ και $ΓΔ$ τέμνονται στο σημείο $Κ$. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$ τέμνονται στο σημείο $Μ$. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Α}Κ = Γ\hat{Α}Μ$.

Λύση



Σχήμα 4

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$:

1. $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές).

2. $ΑΓ = ΑΕ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές).

3. $Δ\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Ε = \hat{Α} + \hat{\theta}$

Άρα τα τρίγωνα $ΑΔΓ$, $ΑΒΕ$ είναι ίσα και κατά συνέπεια θα είναι ίσοι και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους c_1 και c_2.

Η γωνία $Α\hat{Μ}Δ$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΑΔ$. Η γωνία $Α\hat{Μ}Β$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_2 και βαίνει στο τόξο $ΑΒ$. Επειδή όμως $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές) και οι κύκλοι c_1, c_2 είναι ίσοι, συμπεραίνουμε ότι: $Α\hat{Μ}Δ = Α\hat{Μ}Β$. Άρα τα σημεία $Δ, Β, Μ$ είναι συνευθειακά.

Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$.

Άρα το τετράπλευρο $ΑΚΒΔ$ είναι εγγράψιμο, επομένως : (1)

$$\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_2.$$

Η γωνία $\hat{Δ}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Η γωνία $\hat{Α}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Άρα έχουμε:

$$\hat{Α}_2 = \hat{Δ}_2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε: $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι ακέραιος ο αριθμός
$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x}.$$

Λύση
Ο αριθμός Α ορίζεται όταν $13-2x \geq 0$ και $13+2x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}$.
Αν υποθέσουμε ότι $\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z}$, τότε θα είναι $\mathrm{A} = n > 0$ και ισχύει:
$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 == 26 + 2\sqrt{13^2 - 4x^2} = n^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{13^2 - 4x^2} = \frac{n^2}{2} - 13 \qquad (1)$$
Επειδή $0 \leq \sqrt{13^2 - 4x^2} \leq 13$, λόγω της (1) και της υπόθεσης ότι $n \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι:
$$0 \leq \frac{n^2}{2} - 13 \leq 13 \Leftrightarrow 13 \leq \frac{n^2}{2} \leq 13 + 13 \Leftrightarrow 26 \leq n^2 \leq 52 \Leftrightarrow n \in \{6, 7\}.$$
- Για $n = 6$ η εξίσωση (1) γίνεται
$$\sqrt{13^2 - 4x^2} = 5 \Leftrightarrow 169 - 4x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$
- Για $n = 7$ η εξίσωση (1) γίνεται
$$\sqrt{13^2 - 4x^2} = \frac{23}{2} \Leftrightarrow 169 - 4x^2 = \frac{23^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{147}{16} \Leftrightarrow x = \pm \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:
$$xy = z^2 + 2, \quad y^3 = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Λύση
Επειδή είναι $2x^2 + 1 > 0$, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι
$$y^3 > x^3 \Rightarrow (y-x)\left(y^2 + xy + x^2\right) > 0 \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y > x,$$
αφού $y^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$ (η περίπτωση $x = y = 0$ δεν επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος).
Επειδή οι x, y είναι ακέραιοι, από τη σχέση $y > x$, έπεται ότι
$$y \geq x + 1 \Leftrightarrow y^3 \geq (x+1)^3 \Leftrightarrow y^3 \geq x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \qquad (1)$$
Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος και την (1) λαμβάνουμε
$$x^3 + 2x^2 + 1 \geq x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -2, -1, 0\}. \qquad (2)$$
- Για $x = -3$, λαμβάνουμε $y^3 = -8 \Leftrightarrow y = -2$.
- Για $x = -2$, λαμβάνουμε $y^3 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (απορρίπτεται, αφού $xy = z^2 + 2 > 0$).
- Για $x = -1$, λαμβάνουμε $y^3 = 2$ (αδύνατη στο $\mathbb{Z}$).
- Η τιμή $x = 0$, απορρίπτεται, αφού πρέπει $xy = z^2 + 2 > 0$.

Άρα η μοναδική αποδεκτή περίπτωση είναι $x = -3$, $y = -2$, οπότε προκύπτει $z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$, οπότε έχουμε τις λύσεις
$$(x, y, z) = (-3, -2, 2) \text{ ή } (x, y, z) = (-3, -2, -2).$$