ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$74^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4}=\frac{4}{9}:\left(9+1-\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}$$

$$=\frac{4}{9}:\left(10-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}=\frac{4}{9}:9+\frac{77}{81}=\frac{4}{81}+\frac{77}{81}=1.$$

$$\mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{(60-3\cdot 19)}{27}+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{3}{27}+\frac{7}{9}=$$

$$=\frac{308}{81}\cdot 9+\frac{7}{9}=\frac{308+7}{9}=\frac{315}{9}=35.$$

Πρόβλημα 2

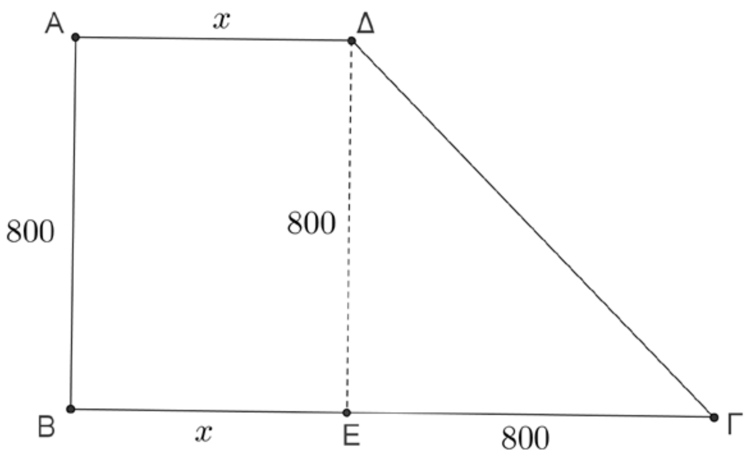
Αγρός έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, ύψος $\mathrm{AB}=800$ μέτρα, μικρή βάση $\mathrm{A\Delta}$, μεγάλη βάση $\mathrm{B\Gamma}$ και διαφορά βάσεων $\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$ μέτρα. Δίνεται ακόμη ότι:

- Η περίμετρος του αγρού είναι μικρότερη από $2810+800\sqrt{2}$ μέτρα.
- Το εμβαδό του αγρού είναι μεγαλύτερο από 796 στρέμματα.
- Η μικρή βάση ΑΔ έχει μήκος x μέτρα, όπου x ακέραιος πολλαπλάσιος του 10.

Να βρείτε τα μήκη των βάσεων και το εμβαδόν του αγρού.
(*Δίνεται ότι 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 τετραγωνικά μέτρα*)

Λύση

Από τις υποθέσεις του προβλήματος είναι $\mathrm{A\Delta}=x$ μέτρα, $\mathrm{B\Gamma}=800+x$ μέτρα, $\mathrm{AB}=800$ μέτρα. Αν φέρουμε τη $\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{B\Gamma}$, τότε είναι ΑΒΕΔ ορθογώνιο με $\mathrm{BE}=x$, $\Delta\mathrm{E}=800$, οπότε θα είναι $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{BE}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$. Έτσι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι $\Gamma\Delta=800\sqrt{2}$ μέτρα.



Σχήμα 1

Επομένως, η περίμετρος και το εμβαδό του αγρού θα είναι:

$$\Pi(x) = x + 800 + x + 800 + 800\sqrt{2} = 2x + 1600 + 800\sqrt{2}$$

$$\mathrm{E}(x) = \frac{2x+800}{2}\cdot 800 = (x+400)\cdot 800 = 800x + 320000.$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος προκύπτουν οι ανισώσεις:

$$2x + 1600 + 800\sqrt{2} < 2810 + 800\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x < 1210 \Leftrightarrow x < 605$$

$$800x + 320000 > 796000 \Leftrightarrow 800x > 476000 \Leftrightarrow x > 595$$

Επομένως έχουμε $595 < x < 605$ και αφού ο αριθμός x είναι ακέραιος πολλαπλάσιος του 10, έπεται ότι $x = 600$ μέτρα.

Άρα τα μήκη των βάσεων είναι $\mathrm{A\Delta} = 600$ μέτρα, ΒΓ=1400 μέτρα και το εμβαδό του αγρού είναι $800\cdot 600 + 320000 = 480000 + 320000 = 800000$ τετραγωνικά μέτρα, δηλαδή 800 στρέμματα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma\Delta}$ με $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Έστω Ν το συμμετρικό του σημείου Λ ως προς την ευθεία ΑΓ. Να βρείτε:

(α) Τα μέτρα των γωνιών $\mathrm{K\hat{M}B}$ και $\mathrm{M\hat{A}\Lambda}$.

(β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΛΝ συναρτήσει του μήκους $\alpha = \mathrm{A\Delta}$.

Λύση

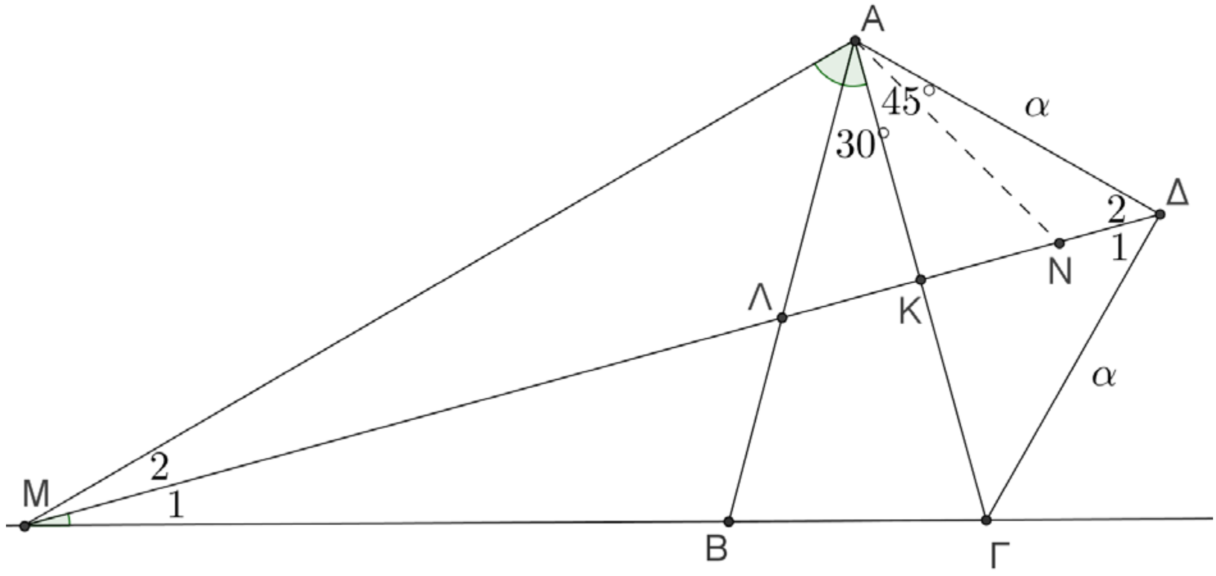
(α) Το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο στο Κ και έχει τη γωνία

$$\hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

Επομένως θα είναι και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$, οπότε έχουμε $\mathrm{K\hat{M}B} = \mathrm{M}_1 = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές και έχει

$$\mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \mathrm{M\hat{\Gamma}A} \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}\Lambda} + \hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}\Lambda} = \hat{\Gamma} - \hat{\mathrm{A}} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ.$$



Σχήμα 2

(β) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} = \alpha\sqrt{2},$$

οπότε θα είναι:

$$\mathrm{AK} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Επειδή τα σημεία Λ και Ν είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ, έπεται ότι $\mathrm{\Lambda K} = \mathrm{KN}$. Όμως και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΛ και ΑΝ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ, οπότε $\mathrm{A\Lambda} = \mathrm{AN}$ και ομοίως $\Lambda\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} = \mathrm{N}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} = 30^\circ$. Άρα είναι $\Lambda\hat{\mathrm{A}}\mathrm{N} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΛΑΝ είναι ισόπλευρο και έχουμε $\mathrm{\Lambda N} = \mathrm{A\Lambda}$. Αν είναι $\mathrm{A\Lambda} = \mathrm{\Lambda N} = x$, τότε θα είναι $\mathrm{\Lambda K} = \frac{\mathrm{\Lambda N}}{2} = \frac{x}{2}$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΚ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A\Lambda}^2 - \mathrm{\Lambda K}^2 = \mathrm{AK}^2 \Leftrightarrow = x^2 - \frac{x^2}{4} = \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} = \frac{2\alpha^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2\alpha^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}.$$

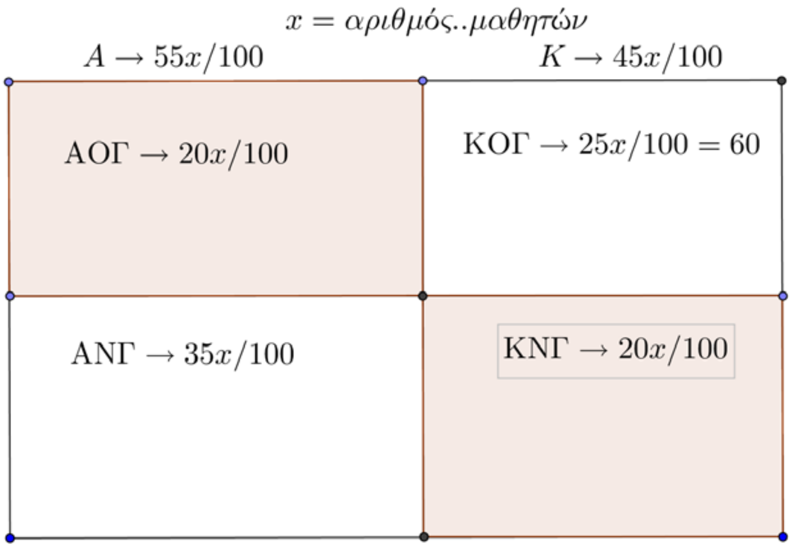
Πρόβλημα 4

Σε ένα σχολείο το 55% των μαθητών είναι αγόρια. Το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά, είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Τα κορίτσια που δεν μιλούν γαλλικά είναι 60. Βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Λύση

Αφού το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά, έπεται ότι το πλήθος των μαθητών που μιλούν γαλλικά ισούται με το 55% του συνόλου των μαθητών. Επομένως το ποσοστό των αγοριών που μιλούν γαλλικά επί του συνόλου των μαθητών του σχολείου είναι $\frac{7}{11} \cdot \frac{55}{100} = \frac{35}{100}$, δηλαδή το 35% επί του συνόλου των μαθητών. Επομένως $(55-35) = 20\%$ είναι το ποσοστό επί του συνόλου των μαθητών των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά, αλλά και των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Επομένως το ποσοστό των κοριτσιών που δεν μιλούν γαλλικά είναι $(100-55-20) = 25\%$, οπότε το 25% των κοριτσιών που δεν μιλούν γαλλικά αντιστοιχεί σε 60 μαθητές. Άρα το πλήθος των μαθητών του σχολείου είναι $60\cdot\dfrac{100}{25}=240$.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να περιγραφεί με το σχήμα που ακολουθεί, ως εξής:



Σχήμα 3

Συμβολικά έχουμε:

$$\text{Α} = \text{σύνολο αγοριών σχολείου με } |\text{Α}| = \frac{55x}{100}.$$

$$\text{Κ} = \text{σύνολο κοριτσιών σχολείου με } |\text{Κ}| = \frac{45x}{100}.$$

ΑΟΓ = σύνολο αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά.

ΑΝΓ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.

ΚΟΓ = σύνολο αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά.

ΚΝΓ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.

Από την υπόθεση έχουμε ότι το **πλήθος των στοιχείων των συνόλων** ΑΟΓ **και** ΚΝΓ **είναι το ίδιο**, δηλαδή:

$$|\text{ΑΟΓ}| = |\text{ΚΝΓ}|,$$

οπότε έχουμε τα λογικά βήματα:

$$(\text{αριθμός μαθητών που μιλούν γαλλικά})|\text{ΚΝΓ}|+|\text{ΑΝΓ}| = |\text{ΑΟΓ}|+|\text{ΑΝΓ}| = \frac{55x}{100}(\text{αριθμός αγοριών}),$$

$$|\text{ΑΝΓ}| = \frac{7}{11}\cdot\frac{55x}{100} = \frac{35x}{100},$$

$$|\text{ΑΟΓ}| = (55-35)\frac{x}{100} = \frac{20x}{100} = |\text{ΚΝΓ}|,$$

$$|\text{ΚΟΓ}| = (45-20)\frac{x}{100} = \frac{25x}{100} = 60 \Leftrightarrow x = 240$$

2^{ος} τρόπος

Έστω x το πλήθος των αγοριών και y το πλήθος των κοριτσιών.

Έστω ακόμη α το πλήθος των αγοριών που γνωρίζουν γαλλικά και κ το πλήθος των κοριτσιών που γνωρίζουν γαλλικά.

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις.

Εφόσον το 55% των μαθητών είναι αγόρια, θα ισχύει:

$$x=\frac{55}{100}(x+y)\Leftrightarrow 100x=55x+55y\Leftrightarrow 9x=11y\Leftrightarrow y=\frac{9}{11}x \qquad (1).$$

Εφόσον το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν Γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν Γαλλικά, θα ισχύει:

$$x-a=\kappa \Leftrightarrow x=\kappa+a \qquad (2).$$

Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά.

Άρα:

$$\frac{7}{11}(\kappa+a)=a\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{7}{11}x=a \qquad (3).$$

Επειδή (τέλος) το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά είναι *60*, θα ισχύει η ισότητα:

$$y=\kappa+60.$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη (της τελευταίας ισότητας) το a, έχουμε:

$$y=\kappa+60\Leftrightarrow y+a=\kappa+a+6\overset{(2)}{\Leftrightarrow}y+\alpha=x+60\overset{(1),(3)}{\Leftrightarrow}\frac{9}{11}x+\frac{7}{11}x=x+60\Leftrightarrow\frac{5}{11}x=60\Leftrightarrow x=132.$$

Άρα το πλήθος των αγοριών είναι 132, το πλήθος των κοριτσιών $y=\frac{9}{11}x=\frac{9}{11}\cdot 132=108$, οπότε το συνολικό πλήθος των μαθητών είναι 240.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3,\quad \mathrm{B}=\frac{243x^2+81y^2}{y}\ \text{ και }\ \Gamma=x^{-1}+y^{-1},\ \text{ όταν }\ x=3^{-3}, y=3^{-4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\left(3^{-3}\right)^3}{\left(3^{-4}\right)^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{3^{-3}}{3^{-4}}\right)^3=\left(\frac{3^{-9}}{3^{-12}}+\frac{1}{3}\right):\left(3^{-3+4}\right)^3=\left(3^{-9+12}+\frac{1}{3}\right):\left(3^1\right)^3$$

$$=\left(3^3+\frac{1}{3}\right):3^3=1+\frac{1}{3^4}=\frac{3^4+1}{3^4}=\frac{82}{81}.$$

$$\mathrm{B}=\frac{243\cdot\left(3^{-3}\right)^2 11+81\cdot\left(3^{-4}\right)^2}{3^{-4}}=\frac{3^5\cdot 3^{-6}+3^4\cdot 3^{-8}}{3^{-4}}=\frac{3^{-1}+3^{-4}}{3^{-4}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=\frac{\frac{3^3+1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=3^3+1=28.$$

$$\Gamma=3^3+3^4=27+81=108.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1$ και $Q(x)=4x^4-5x^2+1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.