$$\mathrm{B\hat{E}\Delta} + \mathrm{\Delta\hat{E}A} + \mathrm{A\hat{E}Z} = \hat{\mathrm{A}} + \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 180^\circ,$$

οπότε η γωνία $\mathrm{B\hat{E}Z}$ είναι ευθεία γωνία και τα σημεία Β, Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A\hat{T}\Delta}$, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Όμως οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{\mathrm{M}}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c_3 = (\mathrm{A}, \Delta, \mathrm{Z})$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AZ}}$, οπότε έχουμε: $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Επειδή η γωνία $\hat{\mathrm{E}}_1$, είναι εξωτερική στο τρίγωνο AEM, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_1 + \mathrm{M\hat{A}E} \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}E} = \hat{\mathrm{E}}_1 - \hat{\mathrm{M}}_1 = 90^o - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \left(90^o - \hat{\mathrm{A}}\right) = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2},$$

οπότε η ευθεία ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$. Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, οπότε η ευθεία ΑΜ είναι και μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b που είναι τέτοιοι ώστε

$$a^2 + 4b^2 = 2a + 12b - 5.$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή το αθροίσματος $a + b$ και οι τιμές των a, b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται.

Λύση

Θέτουμε $s = a + b$, οπότε η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$a^2 + 4(s-a)^2 = 2a + 12(s-a) - 5.$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - (8s - 10)a + 4s^2 - 12s + 5 = 0 \qquad (1)$$

Για να έχει η εξίσωση (1) λύση ως προς a στους πραγματικούς αριθμούς, πρέπει να έχει μη αρνητική διακρίνουσα, δηλαδή πρέπει:

$$\Delta = (8s-10)^2 - 20(4s^2 - 12s + 5) \geq 0 \Leftrightarrow 4\left[(4s-5)^2 - 5(4s^2 - 12s + 5)\right] \geq 0 \Leftrightarrow -4s^2 + 20s \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s(s-5) \leq 0 \Leftrightarrow (s \geq 0 \text{ και } s - 5 \leq 0) \text{ ή } (s \leq 0 \text{ και } s - 5 \geq 0) \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 5.$$

Επομένως η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $s = a + b$ είναι 5. Για $s = 5$ είναι $\Delta = 0$, οπότε από την εξίσωση προκύπτει η λύση $a = 3$ και στη συνέχεια βρίσκουμε $b = 2$.

Β΄ τάξη Λυκείου

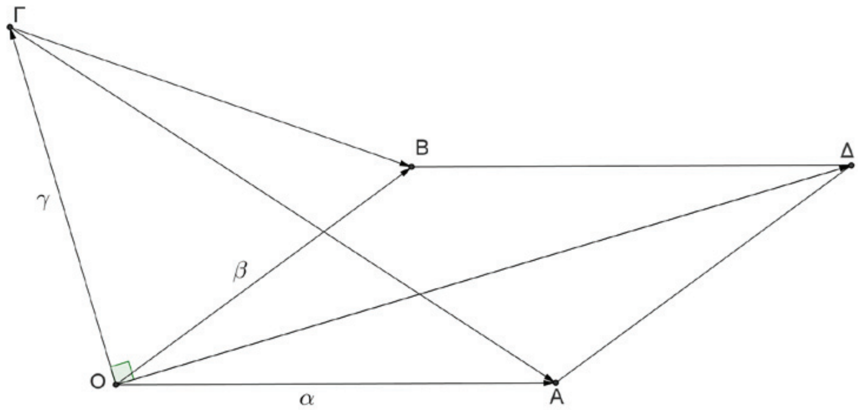
Πρόβλημα 1

Θεωρούμε στο επίπεδο τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ και Γ, έτσι ώστε τα σημεία Ο, Α και Β να μην είναι συνευθειακά και έστω $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει ή ισότητα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}},$$

να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου $\mathrm{OA\Delta B}$.

Λύση



Σχήμα 6

Από τις ισότητες $\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^2=\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right)\cdot\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^2-\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}\Rightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}=0\Rightarrow\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{0}\text{ ή }\vec{\gamma}\perp\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}\,(\text{αδύνατο,αφού O, A, B μη συνευθειακά})\text{ ή }\vec{\gamma}\perp\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{O\Delta}$$

$\Rightarrow\vec{\gamma}$ κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου ΟΑΔΒ.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3-2x^2=4ax^2-11ax+6a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Λύση

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:

$$x^3-2x^2=4ax^2-11ax+6a\Leftrightarrow x^3-2x^2=4ax^2-8ax-3ax+6a$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-2\right)=4ax\left(x-2\right)-3a\left(x-2\right)\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x^2-4ax+3a\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0\text{ ή }x^2-4ax+3a=0\Leftrightarrow x=2\text{ ή }x^2-4ax+3a=0.$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση έχει τη ρίζα $x=2$, για κάθε $a\in\mathbb{R}$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τα $a\in\mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $x^2-4ax+3a=0$ έχει όλες τις ρίζες της α-κέραιες.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=16a^2-12a=4a\left(4a-3\right)$ και πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή $4a\left(4a-3\right)\geq0\Leftrightarrow a\leq0$ ή $a\geq\frac{3}{4}$. Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $u,v\in\mathbb{Z}$, τότε από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$u+v=4a\text{ και }uv=3a\Rightarrow3\left(u+v\right)=4uv\Rightarrow3u+3v-4uv=0\Rightarrow u\left(3-4v\right)=-3v,$$

οπότε αφού $4u-3\neq0$ λαμβάνουμε:

$$u=\frac{3v}{4v-3}=\frac{1}{4}\left(\frac{12v}{4v-3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{12v-9+9}{4v-3}\right)=\frac{1}{4}\left(3+\frac{9}{4v-3}\right)\Rightarrow4u-3=\frac{9}{4v-3}\in\mathbb{Z}.$$

Επομένως, πρέπει $4v-3\in\left\{9,-9,\,3,-3,\,1,\,-1\right\}$, οπότε προκύπτουν αποδεκτές τιμές οι:

$$v = 3 \text{ ή } v = 0 \text{ ή } v = 1.$$

- Για $v = 3$ ή $v = 1$ προκύπτει $u = 1$ ή $u = 3$ και $a = 1$.
- Για $v = 0$ προκύπτει $u = 0$ και $a = 0$.

Επομένως για $a = 0$ ή $a = 1$ η δεδομένη εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z) που είναι λύσεις του συστήματος

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6a^2,$$
$$x + y = 3a,$$
$$y + z \geq 3a,$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

Λύση

Θέτουμε $s = y + z$, οπότε θα είναι $z = s - y$. Επίσης έχουμε $x = 3a - y$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος λαμβάνουμε

$$(3a - y)^2 + y^2 + (s - y)^2 = 6a^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 2(3a + s)y + s^2 + 3a^2 = 0 \qquad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως προς y λύση στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν,

$$\Delta = 4\left[(3a + s)^2 - 3(s^2 + 3a^2)\right] \geq 0 \Leftrightarrow -2s^2 + 6as \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 3a.$$

Όμως από την ανίσωση του συστήματος έχουμε: $s \geq 3a$, οπότε λαμβάνουμε ότι: $s = 3a$. Τότε προκύπτει $\Delta = 0$ και η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση $y = \dfrac{3a + s}{3} = 2a$, οπότε θα είναι $x = 3a - y = a$ και $z = 3a - y = a$. Επομένως, μοναδική λύση του συστήματος είναι η

$$(x, y, z) = (a, 2a, a).$$

Πρόβλημα 4

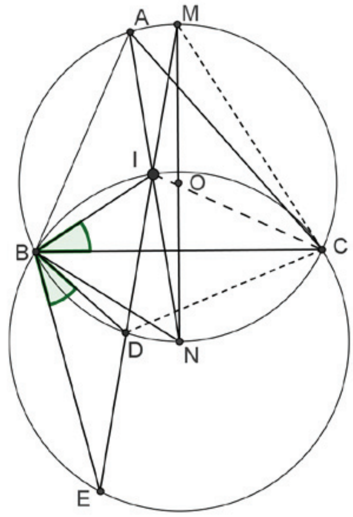
Θεωρούμε τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρο του τριγώνου. Θεωρούμε το μέσον N του τόξου BC που δεν περιέχει το A και το μέσον M του τόξου BC που περιέχει το A. Η ευθεία MI τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο D και τον κύκλο $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ για δεύτερη φορά στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E\hat{B}D} = \mathrm{I\hat{B}C}$.

Λύση

Ο κύκλος $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ περνάει από τα σημεία B και C. Πράγματι, η γωνία $\mathrm{B\hat{I}N}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AIB, οπότε $\mathrm{B\hat{I}N} = \dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Επίσης $\mathrm{N\hat{B}I} = \mathrm{N\hat{B}C} + \mathrm{C\hat{B}I} = \dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$, οπότε $\mathrm{B\hat{I}N} = \mathrm{N\hat{B}I}$, οπότε $\mathrm{NB} = \mathrm{NI}$.

Επιπλέον, επειδή η κάθετος από το κέντρο O του κύκλου προς την πλευρά BC περνάει από τα μέσα των αντίστοιχων τόξων, έπεται ότι η NM είναι διάμετρος του κύκλου (O, R), οπότε $\mathrm{N\hat{D}M} = 90^\circ$. Επομένως στον κύκλο $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ το σημείο D είναι μέσο της χορδής IE.

13



Σχήμα 7

Από το τρίγωνο BED έχουμε $\mathrm{E\hat{B}D} = \mathrm{B\hat{D}M} - \mathrm{B\hat{E}I}$. Όμως $\mathrm{B\hat{D}M} = 90^\circ - \mathrm{B\hat{A}N} = 90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$

και $\mathrm{B\hat{E}I} = \frac{\hat{\mathrm{C}}}{2}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο του κύκλου $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$). Επομένως έχουμε

$$\mathrm{E\hat{B}D} = 90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{\hat{\mathrm{C}}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \mathrm{I\hat{B}C}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Λύση

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 20ax - 6ax + 24a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4) = 5ax(x-4) - 6a(x-4) \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 5ax + 6a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ ή } x^2 - 5ax + 6a = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ή} \quad x^2 - 5ax + 6a = 0.$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση έχει τη ρίζα $x = 4$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τα $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $x^2 - 5ax + 6a = 0$ έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 25a^2 - 24a = a(25a - 24)$ και πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή $a(25a - 24) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ ή $a \geq \frac{24}{25}$. Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $u, v \in \mathbb{Z}$, τότε από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$u + v = 5a \text{ και } uv = 6a \Rightarrow 6(u+v) = 5uv \Rightarrow 6u + 6v - 5uv = 0 \Rightarrow u(6 - 5v) = -6v,$$

οπότε αφού $6 - 5v \neq 0$ λαμβάνουμε:

$$u = \frac{6v}{5v-6} = \frac{1}{5}\left(\frac{30v}{5v-6}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{30v - 36 + 36}{5v-6}\right) = \frac{1}{5}\left(6 + \frac{36}{5v-6}\right) \Rightarrow 5u - 6 = \frac{36}{5v-6} \in \mathbb{Z}.$$