ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$75^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}.$$

Λύση. Έχουμε :

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{21}{9}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}$$

$$=\left(-\frac{28}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\left(\frac{10}{3}\right)^{2}:\left(\frac{10}{9}\right)^{2}=\frac{100}{9}\cdot\frac{81}{100}=\frac{81}{9}=9.$$

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 350 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

***Σημείωση**: Οι αριθμοί $11\frac{1}{9}\%$ και $14\frac{2}{7}\%$ είναι μεικτοί.*

Λύση

Έστω x ευρώ η τιμή πώλησης του ψυγείου, οπότε η τιμή πώλησης του πλυντηρίου θα είναι $3150-x$ ευρώ. Η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $11\frac{1}{9}\%=\frac{100}{9}\%$, οπότε η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $x\cdot\frac{100/9}{100}=\frac{x}{9}$ ευρώ. Επίσης, η έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $14\frac{2}{7}\%=\frac{100}{7}\%$, οπότε η αντίστοιχη έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $\left(3150-x\right)\cdot\frac{100/7}{100}=\frac{3150-x}{7}=450-\frac{x}{7}$. Άρα έχουμε

$$\frac{x}{9}+450-\frac{x}{7}=390\Leftrightarrow\frac{x}{9}-\frac{x}{7}=-60\Leftrightarrow\frac{2x}{63}=60\Leftrightarrow x=63\cdot30\Leftrightarrow x=1890.$$

Επομένως, η τιμή πώλησης του ψυγείου ήταν 1890 ευρώ και η τιμή πώλησης του πλυντηρίου ήταν $3150-1890=1260$ ευρώ.

Πρόβλημα 3. Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $3/4$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $2/3$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ είναι το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Λύση

Έστω ότι τα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν τα ποσά $\alpha,\beta,\gamma,\delta,$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\beta=\frac{3\gamma}{4},\ \alpha=\frac{2\beta}{3},\ \delta=\alpha+\gamma\Rightarrow\alpha=\frac{2\beta}{3},\ \gamma=\frac{4\beta}{3},\ \delta=\frac{6\beta}{3}=2\beta$$

$$\frac{3\alpha}{2}=\beta=\frac{3\gamma}{4}=\frac{\delta}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2/3}=\frac{\beta}{1}=\frac{\gamma}{4/3}=\frac{\delta}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος το ποσό των 9690 ευρώ πρέπει να διαμεριστεί σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ οποίοι, όπως διαπιστώνουμε από την τελευταία σχέση είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς $2,3,4$ και 6. Επομένως, αρκεί να διαμερίσουμε το ποσό των 9690 ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2,3,4 και 6. Έτσι, αν διαιρέσουμε τον αριθμό 9690 σε $2+3+4+6=15$ ίσα μέρη έχουμε μερίδιο το ποσό $9690:15=646$ ευρώ. Επομένως, το χωριό Α πλήρωσε $646\cdot 2=1292$ ευρώ, το χωριό Β πλήρωσε $646\cdot 3=1938$ ευρώ, το χωριό Γ πλήρωσε $646\cdot 4=2584$ ευρώ και το χωριό Δ πλήρωσε $646\cdot 6=3876$ ευρώ.

Διαφορετικά, από τις ισότητες

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}=\omega\Rightarrow\alpha=2\omega,\ \beta=3\omega,\ \gamma=4\omega,\ \delta=6\omega,$$

οπότε από την υπόθεση $\alpha+\beta+\gamma+\delta=9690$ με αντικατάσταση λαμβάνουμε:

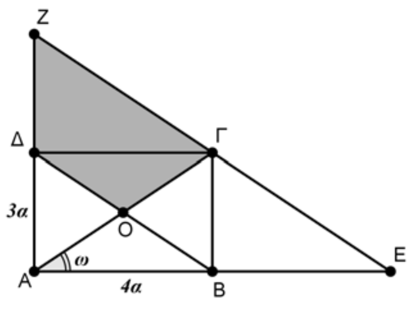
$$2\omega+3\omega+4\omega+6\omega=9690\Leftrightarrow 15\omega=9690\Leftrightarrow\omega=646.$$

Άρα είναι: $\alpha=2\omega=1292,\ \beta=3\omega=1938,\ \gamma=4\omega=2584,\ \delta=6\omega=3876$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{A}B=\omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

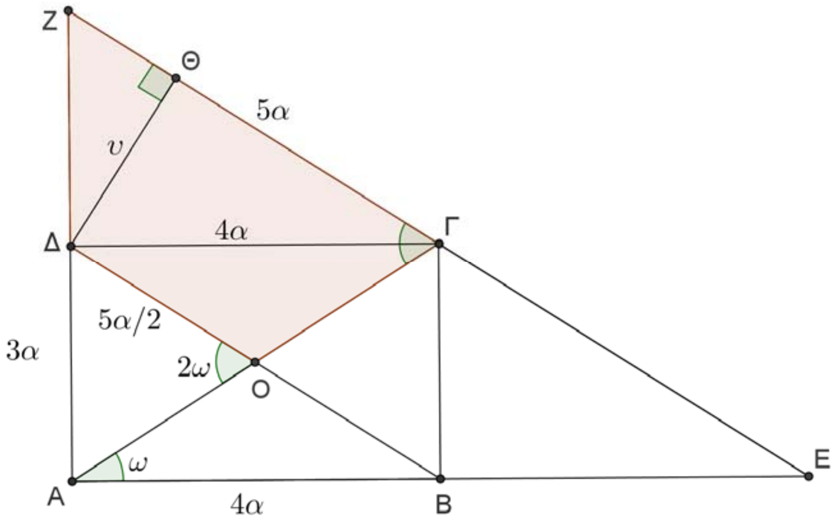
$$AB=4\alpha\ cm,\ A\Delta=3\alpha\ cm.$$



1. Βρείτε τη γωνία $A\hat{\Gamma}Z$ συναρτήσει της γωνίας ω.
2. Αποδείξετε ότι: $A\Gamma=\Gamma Z=\Gamma E$.
3. Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.

Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Λύση



Σχήμα 2

1. Επειδή οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, έπεται ότι $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με $Ο\hat{Β}Α = \omega = Ο\hat{Α}Β$. Η γωνία $Α\hat{Ο}Δ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΟΒ, οπότε θα είναι $Α\hat{Ο}Δ = Ο\hat{Α}Β + Ο\hat{Β}Α = 2\omega$. Από την παραλληλία $ΕΖ \parallel ΒΔ$, επειδή οι γωνίες $Α\hat{Γ}Ζ$ και $Α\hat{Ο}Δ$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, έχουμε: $Α\hat{Γ}Ζ = 2\omega$.

2. Επειδή $ΕΖ \parallel ΒΔ$ και $ΓΔ \parallel ΑΕ$, $ΒΓ \parallel ΑΖ$, τα τετράπλευρα ΔΒΕΓ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες. Άρα είναι: $ΒΔ = ΓΖ = ΓΕ$ Όμως οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $ΑΓ = ΒΔ$. Επομένως, θα είναι και $ΑΓ = ΓΖ = ΓΕ$.

3. Το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $ΑΓ = ΓΖ$, οπότε το ύψος του $ΓΔ = ΑΒ = 4\alpha\ cm$ είναι και διάμεσος. Αρα είναι: $ΑΖ = 2 \cdot ΑΔ = 6\alpha\ cm$ και $ΔΖ = 3\alpha\, cm$.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 \Rightarrow ΒΔ^2 = (4\alpha)^2 + (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 \Rightarrow ΒΔ = 5\alpha\ cm.$$

Άρα είναι: $ΟΔ = \dfrac{ΒΔ}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$ και $ΓΖ = 5\alpha\, cm$.
Για το ύψος $\upsilon = ΔΘ$ έχουμε ότι:

$$Ε(ΓΔΖ) = \frac{ΔΓ \cdot ΔΖ}{2} = \frac{ΓΖ \cdot ΔΘ}{2} \Leftrightarrow \frac{4\alpha \cdot 3\alpha}{2} = \frac{ΓΖ \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{12\alpha}{5}.$$

Επομένως, είναι:

$$Ε(ΔΟΓΖ) = \frac{(ΔΟ + ΓΖ)}{2} \cdot \upsilon = \frac{\left(\frac{5\alpha}{2} + 5\alpha\right)}{2} \cdot \frac{12\alpha}{5} = 9\alpha^2\ cm^2.$$