Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^3+ax^2+bx+c$, όπου a,b,c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x)=\mathrm{P}(2x)-19\mathrm{P}(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x)=3x(3x+2)^2$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$Q(x)=\mathrm{P}(2x)-19\mathrm{P}(-x)=(2x)^3+a(2x)^2+b\cdot 2x+c-19\left((-x)^3+a(-x)^2+b(-x)+c\right)$$

$$=8x^3+4ax^2+2bx+c+19x^3-19ax^2+19bx-19c=27x^3-15ax^2+21bx-18c.$$

(β) Από την ισότητα $Q(x)=3x(3x+2)^2$ έχουμε:

$$27x^3-15ax^2+21bx-18c=3x(3x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 27x^3-15ax^2+21bx-18c=3x\left(9x^2+12x+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3-15ax^2+21bx-18c=27x^3+36x^2+12x$$

$$\Leftrightarrow \{-15a=36,\ 21b=12,\ -18c=0\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{a=-\frac{12}{5},\ b=\frac{4}{7}, c=0\right\}.$$

Άρα είναι: $\mathrm{P}(x)=x^3-\frac{12}{5}x^2+\frac{4}{7}x.$

Πρόβλημα 2. Οι πραγματικοί αριθμοί a,b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b)\neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)}+\frac{b(a+b)}{a(a-b)}=\frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2=b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\frac{a}{b}$.

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)}+\frac{b(a+b)}{a(a-b)}=\frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}\Leftrightarrow b(a-b)^2+b(a+b)^2=a\left(3ab-b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow b\left[(a-b)^2+(a+b)^2\right]-ab(3a-b)=0\Leftrightarrow b\left(2a^2+2b^2\right)-ab(3a-b)=0$$

$$\Leftrightarrow b\left(2a^2+2b^2-3a^2+ab\right)=0\overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow}2b^2-a^2+ab=0\Leftrightarrow a^2=b(a+2b).$$

(β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$a^2-ab-2b^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-2=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow x^2-1-x-1=0,\quad x=\frac{a}{b}\Leftrightarrow(x-1)(x+1)-(x+1)=0,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0,\ \ x=\frac{a}{b} \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}=-1 \text{ (απορρίπτεται, γιατί } a\neq -b\text{) ή } \frac{a}{b}=2 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=2.$$

Πρόβλημα 3.

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz}=100x+10y+z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx}=100z+10y+x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyz}=100x+10y+z=43(x+y+z)+9 \tag{1}$$

$$\overline{zyx}=100z+10y+x=30(x+y+z)+6, \tag{2}$$

από τις οποίες για τη διαφορά των δύο αριθμών προκύπτει ότι:

$$\overline{xyz}-\overline{zyx}=99(x-z)=13(x+y+z)+3. \tag{3}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $10\leq x+y+z\leq 23$, γιατί, αν ήταν $x+y+z\geq 24$, τότε θα είχαμε $\overline{xyz}>43\cdot 24+9=1041$, άτοπο. Επομένως για το δεύτερο μέλος της σχέσης (3) έχουμε:

$$10\cdot 13+3\leq 13(x+y+z)+3\leq 23\cdot 13+3$$
$$\Rightarrow 133\leq 13(x+y+z)+3\leq 302$$
$$\Rightarrow 133\leq 99(x-z)\leq 302,$$

οπότε οι δυνατές τιμές για τη διαφορά των δύο ακραίων ψηφίων είναι 2 ή 3.

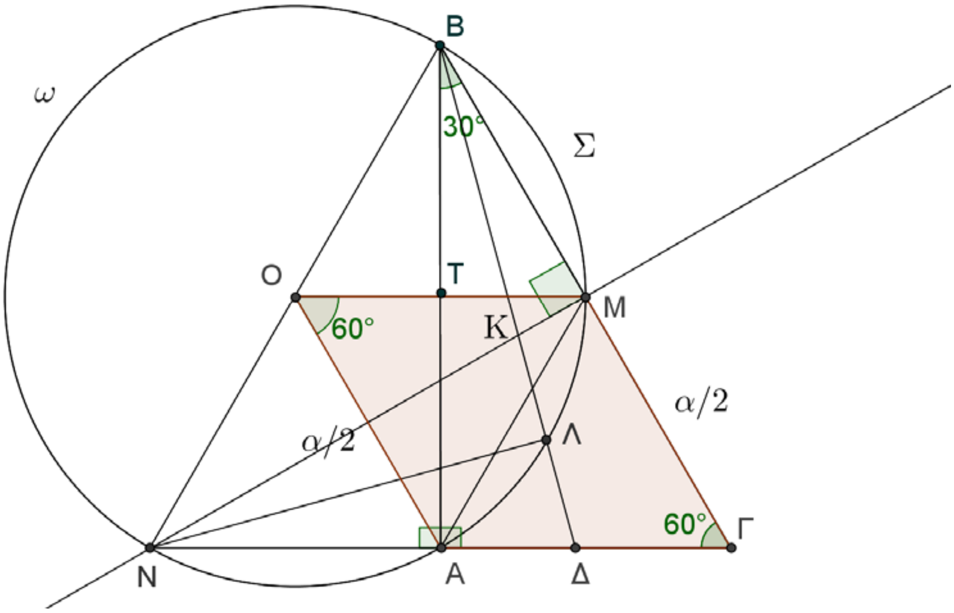
- Για $x-z=2$, από την (3) προκύπτει: $x+y+z=15$ οπότε από τις (1) και (2) λαμβάνουμε $\overline{xyz}=654$ και $\overline{zyx}=456$.
- Για $x-z=3$, από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα των ψηφίων $x+y+z$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=90^\circ, \hat{\Gamma}=60^\circ$ και υποτείνουσα $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον Μ της ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ (το Δ είναι σημείο της ΑΓ) στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν. Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΔ.

1. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{N\Lambda}\perp \mathrm{B\Delta}$.
2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις ΜΓ, ΑΓ και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ του κύκλου ω. Να υπολογίσετε το εμβαδό χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$.

Σημείωση: *Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου ω.*



Σχήμα 2

Λύση

1. Έστω ότι οι ευθείες $KM, A\Gamma$ τέμνονται στο σημείο N. Τότε

$$N\hat{K}\Delta = B\hat{K}M = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} = 75^\circ.$$

Επίσης η γωνία $N\hat{\Delta}K$ ως εξωτερική του τριγώνου $\Delta\Gamma B$ ισούται με

$$N\hat{\Delta}K = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2} = 60^\circ + \frac{30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Συνεπώς το τρίγωνο $NK\Delta$ είναι ισοσκελές με $NK = N\Delta$. Αφού το Λ είναι μέσον της βάσης $K\Delta$ του ισοσκελούς τριγώνου $NK\Delta$, έπεται ότι: $N\Lambda \perp B\Delta$.

2. Το τρίγωνο $B\Gamma N$ είναι ισοσκελές με $N\Gamma = NB$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως, το τρίγωνο $B\Gamma N$ είναι ισόπλευρο, οπότε $BN = \alpha$. ΟΙ ΒΑ και ΝΜ είναι ύψη και διάμεσοι αυτού, οπότε $A\Gamma = M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$ Ο κύκλος διαμέτρου BN έχει κέντρο, έστω Ο και περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Το τρίγωνο ΟΑΜ είναι ισοσκελές και έχει

$$A\hat{O}M = 2 \cdot A\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \left(90^\circ - 60^\circ\right) = 60^\circ.$$

Επίσης $A\hat{O}B = 2 \cdot \Gamma\hat{N}B = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, οπότε $M\hat{O}B = 60^\circ$ και το τρίγωνο ΟΜΒ είναι ισόπλευρο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΒΟ είναι ρόμβος που αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, οπότε το ύψος του ΑΤ ισούται με το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, δηλαδή

$$AT = \frac{\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Το εμβαδόν του χωρίου E δίνεται από τη σχέση

$$E\left(\Gamma\overset{\frown}{AM}\right) = E\left(A\Gamma BO\right) - E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(O\overset{\frown}{AM}\right). \qquad (1)$$

Έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma MO}\right)=\left(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\right)\cdot\left(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma\right)=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} \qquad (2)$$

Επίσης

$$\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{24} \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\mathrm{E}\left(\Gamma\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right)-\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi\alpha^2}{24}=\frac{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)\alpha^2}{24}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\dfrac{\alpha^2-1}{n^2+\alpha n}\cdot\left(\dfrac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\dfrac{\alpha+n-\alpha n^3-n^4}{1-\alpha^2}$, με α πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n>1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A}=n^2+n+1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο Α να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\frac{(\alpha+n)-n^3(\alpha+n)}{-(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2-n^2+n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)\left(1-n^3\right)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)\left(1-n^3\right)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{n(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+n)\left(1-n^3\right)}{n(n+\alpha)(n-1)(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{n^3-1}{n-1}=n^2+n+1.\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι: $n^2<\mathrm{A}=n^2+n+1<n^2+2n+1=(n+1)^2$, δηλαδή ο ακέραιος Α βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακέραιων, οπότε δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο κάποιου ακέραιου.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.