ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

16 Ιανουαρίου 2016

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0,\overline{2}$ και $\beta = 0,\overline{3}$.

(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016}.$$

Λύση

(α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha = 0{,}222\ldots$$
$$10\alpha = 2{,}222\ldots$$
$$10\alpha = 0{,}222\ldots + 2$$
$$10\alpha = \alpha + 2$$
$$9\alpha = 2$$

Άρα είναι $\alpha = \frac{2}{9}$..

Εργαζόμενοι ομοίως, βρίσκουμε ότι: $\beta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(β) Έχουμε:

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016} = \left(3\cdot\frac{2}{9} - 5\cdot\frac{3}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{9}\right)^2\right)^{2016}$$

$$= \left(\frac{6}{9} - \frac{15}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\frac{4}{81} + \frac{9}{81}\right)^{2016} = (-1)^{2015} + (+1)^{2016} = -1 + 1 = 0.$$

Πρόβλημα 2.

Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλειο τετράγωνο.

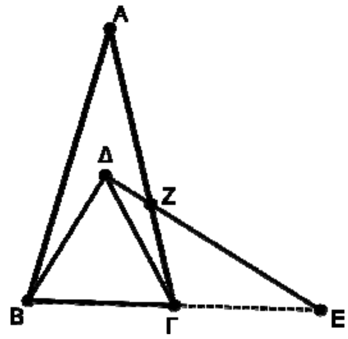
Λύση

Αναλύουμε το 2016 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε ότι $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Επομένως, όταν ο αριθμός 2016 πολλαπλασιαστεί με κάποιο παράγοντα, για να προκύψει γινόμενο που είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο παράγοντας αυτός να έχει ως παράγοντες τους αριθμούς 2 και 7 σε περιττό εκθέτη και κάθε άλλο πρώτο παράγοντα σε άρτιο εκθέτη. Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός είναι ο $2 \cdot 7 = 14$. Παρατηρούμε ότι και η

διαίρεση $2016:(2\cdot 7)$ δίνει πηλίκο ίσο με $2^4\cdot 3^2=\left(2^2\cdot 3\right)^2=12^2$, που είναι τέλειο τετράγωνο.
Επομένως ο μικρότερος θετικός ακέραιος με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι ο 14.

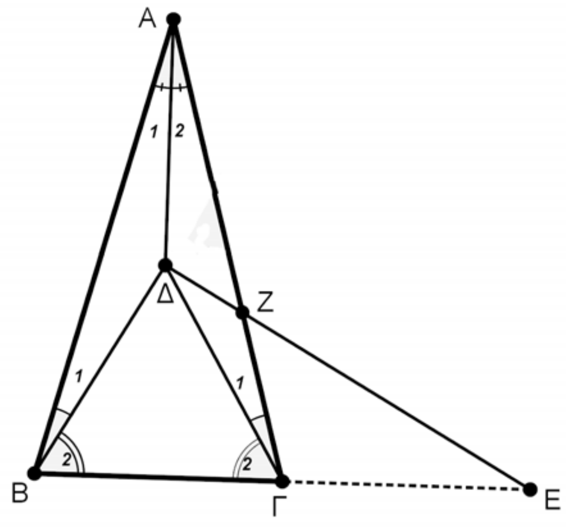
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές $(AB=A\Gamma)$ και $\hat{A}=30^0$. Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο και το σημείο E βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και είναι τέτοιο ώστε $B\Gamma=\Gamma E$. Αν η πλευρά $A\Gamma$ τέμνεται από τη ΔE στο σημείο Z, τότε:



(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$.
(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελή.
(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2=60^0$.
Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{A}=30^0$ άρα $\hat{B}=\hat{\Gamma}=75^0$.
Αφαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη, έχουμε:

$$\hat{B}-\hat{B}_2=\hat{\Gamma}-\hat{\Gamma}_2=75^0-60^0=15^0\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1=15^0.$$

β) Επειδή $AB=A\Gamma$ και $\Delta B=\Delta\Gamma$ η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$, άρα και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2=15^0.$$

Άρα τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $A\Delta B$ είναι ισοσκελή.
(γ) Το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές ($\Gamma\Delta=\Gamma E$) με

$$\Delta\hat{E}\Gamma=\hat{\Gamma}_1+Z\hat{\Gamma}E=15^0+(180^0-\hat{\Gamma})=$$

$$=15^0+180^0-75^0=120^0.$$

Άρα $\hat{\Gamma\Delta E}=\hat{\Delta E\Gamma}=30^0$. Επειδή από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ είναι

$$E\hat{B}\Delta=\Gamma\hat{B}\Delta=60^o,$$

έπεται ότι:

$$B\hat{\Delta}E=180^\circ-\left(E\hat{B}\Delta+\Delta\hat{E}B\right)=180^\circ-\left(60^\circ+30^\circ\right)=90^\circ,$$

οπότε το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

.

Πρόβλημα 4.

Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\frac{1}{4}$ του έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.

(*Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση*)

Λύση

Αφού στο πρώτο τέταρτο δούλευαν όλοι οι ερευνητές, το έργο ολοκληρώθηκε στην ώρα του και υποθέτουμε ότι χρειάστηκαν χρόνο t.

Στο δεύτερο τέταρτο σε κάθε χρονική μονάδα ολοκληρώνεται το $\frac{500-100}{500}=\frac{400}{500}=\frac{4}{5}$ από το έργο που θα ολοκληρωνόταν αν δούλευαν όλοι. Επομένως, για να ολοκληρωθεί το δεύτερο τέταρτο του έργου χρειάζεται χρόνος $\frac{5}{4}t$.

Όμοια για να ολοκληρωθεί το τρίτο τέταρτο του έργου θα χρειαστεί χρόνος $\frac{5}{3}t$.

Έστω τέλος ότι με την προσθήκη των ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο χρειάζεται χρόνος x.

Το έργο για να τελειώσει στην ώρα ή νωρίτερα του χρειάζεται χρόνος τετραπλάσιος από το πρώτο τέταρτο που δούλευαν όλοι, δηλαδή χρόνος μικρότερος ή ίσος με $4t$.

Άρα, έχουμε τη σχέση:

$$t+\frac{5}{4}t+\frac{5}{3}t+x=4t\Leftrightarrow x=t\left(3-\frac{5}{4}-\frac{5}{3}\right)=t\frac{(36-15-20)}{12}=\frac{1}{12}t$$

Επομένως, αν έγινε πρόσληψη y ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο δούλεψαν $300+y$ επιστήμονες και για το τελευταίο τέταρτο χρειάστηκαν χρόνο $x=\frac{500}{300+y}t$, οπότε πρέπει $\frac{500}{300+y}t=\frac{1}{12}t\Rightarrow 6000=y+300\Rightarrow 5700=y$

Επομένως πρέπει να προσληφθούν 5700 επιστήμονες.