Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}\ .$$

Λύση

(α) $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48=4\left[(x+4)^2-7(x+4)+12\right]$

$=4\left(x^2+8x+16-7x-28+12\right)=4\left(x^2+x\right)=4x(x+1).$

(β) $A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}=6\sqrt{-20(-5+1)}-4\sqrt{16(4+1)}=6\sqrt{80}-4\sqrt{80}=2\sqrt{80}=8\sqrt{5}$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3,\ \text{για κάθε πραγματικό αριθμό } x.$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256$ είναι κύβος ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

(α) $x(2x-1)(2x+1)+x=x\left(4x^2-1\right)+x=4x^3-x+x=4x^3.$

(β) Επειδή οι ακέραιοι 4031 και 4033 διαφέρουν κατά δύο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $2x-1=4031,\ 2x+1=4033$, οπότε θα είναι $x=2016$. Για να αντιστοιχήσουμε τον αριθμό Α στην προηγούμενη ταυτότητα, πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με τον ακέραιο $\frac{32256}{2016}=16$. Τότε αυτή γίνεται: $16x(2x-1)(2x+1)+16x=64x^3$, οπότε θέτοντας $x=2016$, έχουμε:

$$\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256=64\cdot 2016^3=4^3\cdot 2016^3=(4\cdot 2016)^3=8064^3.$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 8064.

Πρόβλημα 3

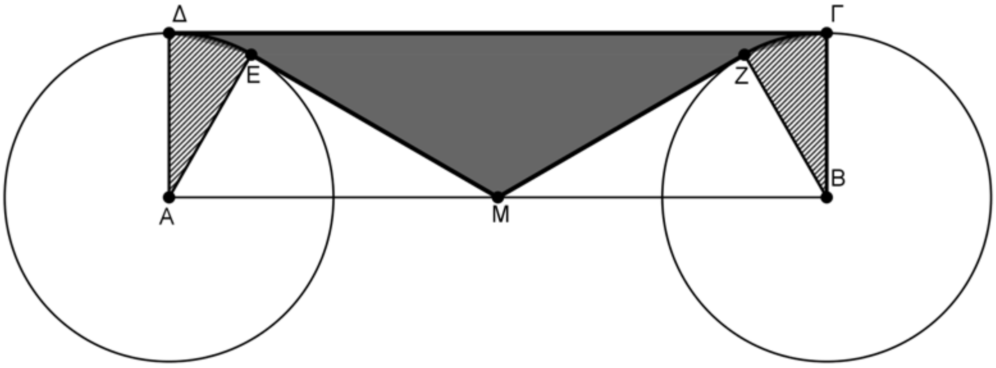
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{A}\Delta=\alpha$ και $\mathrm{AB}=4\alpha$. Με κέντρα τα σημεία Α , Β και ακτίνα α γράφουμε κύκλους Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου ΔΕΜΖΓ που περικλείεται από το τόξο ΔΕ , τα τμήματα ΕΜ, ΜΖ , το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ .

Λύση

(α) Επειδή το M είναι το μέσον του AB θα έχουμε ότι $\mathrm{MA} = 2\alpha$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο EAM έχουμε $\eta\mu(\mathrm{E\hat{M}A}) = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AM}} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$, οπότε $\mathrm{E\hat{M}A} = 30°$, $\mathrm{E\hat{A}M} = 90° - 30° = 60°$ και συνεπώς $\mathrm{E\hat{A}\Delta} = 90° - 60° = 30°$.



Σχήμα 2

(β) Το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει, αν από το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ αφαιρέσουμε το εμβαδό των τριγώνων $\mathrm{EAM}, \mathrm{MZB}$ και αφαιρέσουμε και τους κυκλικούς τομείς $\mathrm{\Delta AE}, \mathrm{ZB\Gamma}$.
Προφανώς $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \alpha \cdot 4\alpha = 4\alpha^2$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $\mathrm{EM}^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow \mathrm{EM} = \alpha\sqrt{3}$, οπότε $(\mathrm{EAM}) = \frac{1}{2}\mathrm{EA} \cdot \mathrm{EM} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$, και όμοια $(\mathrm{BZM}) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$. Επιπλέον, ομοίως με το ερώτημα (α) υπολογίζουμε ότι $\mathrm{Z\hat{B}\Gamma} = 30^{\circ}$, οπότε έχουμε

$$\varepsilon\mu\beta\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha(\Delta\mathrm{AE}) = \varepsilon\mu\beta\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha(\mathrm{ZB\Gamma}) = \frac{\pi\alpha^2}{12}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\varepsilon\mu\beta\gamma\rho\alpha\mu.\,\chi\omega\rho\acute{\iota}o\upsilon\left(\Delta\mathrm{EMZ\Gamma}\right) = 4\alpha^2 - 2\cdot\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\pi\alpha^2}{12} = \alpha^2\left(4 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση.

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη $\frac{\alpha}{4}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 4. (1)

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{12}$ και δίνει στο Γιάννη $\frac{11\beta}{12}$.

Επομένως, ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12}$ καραμέλες, ενώ ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει $6\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}\right)=\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12} \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{4}=\frac{5\beta}{12} \Leftrightarrow 9\alpha = 5\beta$. (2)

Για να ισχύει η (2), πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 5. (3)

Από τις (1) και (3) συνάγουμε ότι το α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5\cdot 4 = 20$, οπότε η ελάχιστη τιμή του α είναι 20. Επομένως, από τη σχέση (2) παίρνουμε $\beta = 36$.

Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $20+36=56$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

$$\text{Α}=\left(\frac{25}{x+8}-\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+4}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4}+8\cdot\sqrt[3]{x}}{9-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{21-\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}}, \text{ όπου } x>0 \text{ και } x\neq 27.$$

Λύση.

Θέτουμε: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}=y>0,\ x>0 \Rightarrow x=y^3,\ x,y>0$, οπότε η Α γράφεται:

$$\text{Α}=\left(\frac{25}{y^3+8}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right)\cdot\frac{y^4+8y}{9-y^2}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\left[\frac{25}{(y+2)(y^2-2y+4)}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right]\cdot\frac{y(y^3+8)}{(3-y)\cdot(3+y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{[5^2-(y+2)^2]}{(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}\cdot\frac{y\cdot(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}{(3+y)\cdot(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{(7+y)(3-y)y(y+2)(y^2-2\cdot y+4)}{(y+2)(y^2-2y+4)(3+y)(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{y(7+y)}{3+y}+\frac{21-y^2}{3+y}=\frac{7y+y^2+21-y^2}{3+y}=\frac{7(y+3)}{y+3}=7.$$

.

Πρόβλημα 2

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση $64x^2+16^{10}x-2016^{2016}=0$ έχει ρητή ρίζα.

Λύση