$$2\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}\right)=\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}+\frac{5\gamma}{12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{12} \Leftrightarrow 3\alpha+12\beta=2\gamma \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2), (3) κατά μέλη έχουμε ότι :

$$30\beta=6\alpha \Leftrightarrow 5\beta=\alpha$$

Οπότε από την (3) προκύπτει ότι:

$$27\beta=2\gamma .$$

Το β αφού είναι πολλαπλάσιο του 8 η ελάχιστη τιμή του είναι 8. Οπότε η ελάχιστη τιμή για το α είναι $\alpha=5\cdot 8=40$ και για το $\gamma=\frac{27\cdot 8}{2}=27\cdot 4=108$. Δηλαδή η ελάχιστη τιμή από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $8+40+108=156$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1=(2-x)^2$, $\alpha_2=2^2+x^2,\ldots,$ όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n,(n>1),$ για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του $x,$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega=2^2+x^2-(2-x)^2=4x.$ Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n=\frac{\left[2(2-x)^2+4(n-1)x\right]n}{2}=\left(x^2+2(n-3)x+4\right)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n}=x^2+2(n-3)x+4$$

και είναι τριώνυμο μεταβλητής x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=4(n-3)^2-16=4\left(n^2-6n+5\right)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x, αν και μόνον, αν $\Delta=0 \Leftrightarrow n^2-6n+5=0 \Leftrightarrow n=1$ ή $n=5.$

Η τιμή $n=1$ απορρίπτεται, γιατί $n>1.$ Επομένως, για $n=5$ είναι

$$\frac{S_5}{5}=x^2+4x+4=(x+2)^2 .$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x, τότε έχουμε

$\frac{S_n}{n}=x^2+2(n-3)x+4\geq 0$, για $x\in\mathbb{R}$, εφόσον $\Delta\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq n\leq 5$. Τότε, για $n\in\{2,3,4,5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n}=\left(\sqrt{x^2+2(n-3)x+4}\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση

$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0.$$

Λύση
Έχουμε

$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - \left(6x^2 + 12x + 8\right) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

$$6x^2 + 12x + 8 = \left(x^3 + 6x^2 + 12x + 8\right) - x^3 = (x+2)^3 - x^3,$$

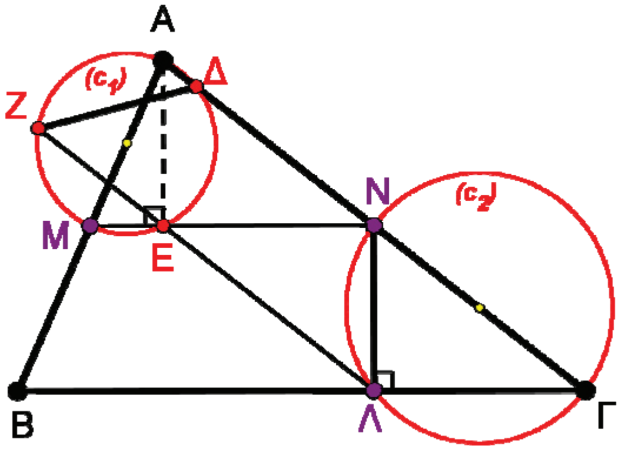
οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$10x^3 - \left(6x^2 + 12x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - (x+2)^3 + x^3 = 0 \Leftrightarrow 11x^3 = (x+2)^3$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{11} = x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{11} - 1}.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τα μέσα Μ, Ν των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την ΑΜ και τέμνει τις ΑΓ, ΜΝ στα σημεία Δ, Ε, αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_2) έχει διάμετρο την ΓΝ και τέμνει την ΒΓ στο σημείο Λ. Η ΕΛ τέμνει το κύκλο (c_1) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΔΝΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



Σχήμα 4

Η γωνία $\mathrm{A\hat{E}M}$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_1)) και βαίνει στη διάμετρο ΑΜ του κύκλου (c_1), οπότε θα είναι:

$$\mathrm{AE} \perp \mathrm{MN} \qquad (1).$$

Η γωνία $\mathrm{N\hat{\Lambda}\Gamma}$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_2)) και βαίνει στη διάμετρο ΝΓ του κύκλου (c_2), οπότε θα είναι

$$\mathrm{N\Lambda} \perp \mathrm{B\Gamma} \qquad (2).$$

Τα σημεία M, N είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε θα είναι:

$$MN = //\frac{ΒΓ}{2} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι: $ΑΕ = ΛΝ = \frac{υ_α}{2}$ και $ΑΕ//ΛΝ$.

Άρα το τετράπλευρο $ΑΕΛΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Το τετράπλευρο $ΑΔΕΖ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο , διότι είναι τραπέζιο $ΕΖ\parallel ΑΔ$, εγγεγραμμένο στον κύκλο (c_1). Άρα $ΑΕ = ΔΖ$ οπότε θα είναι και $ΔΖ = ΝΛ$.

Δηλαδή το τετράπλευρο $ΔΖΛΝ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b) που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\frac{a}{b}+\frac{17b}{36a}$ να είναι ακέραιος.

Λύση

Θέλουμε $\frac{a}{b}+\frac{17b}{36a}=κ$, όπου $κ$ είναι ένας ακέραιος. Θέτουμε $\frac{a}{b}=x$ και τότε η σχέση γράφεται ως $x+\frac{17}{36x}=κ \Leftrightarrow 36x^2-36κx+17=0$ (1) και ουσιαστικά ψάχνουμε τις ρητές λύσεις της (1). Για να έχει ρητές λύσεις η (1) πρέπει η διακρίνουσα να είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή θέλουμε $Δ=(36κ)^2-4\cdot 36\cdot 17=(2\cdot 6)^2(9κ^2-17)$ να είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε θέλουμε $9κ^2-17=s^2$ για κάποιον θετικό ακέραιο s.

Τότε $(3κ)^2-s^2=17 \Leftrightarrow (3κ-s)(3κ+s)=17$ και αφού ο 17 είναι πρώτος και οι $κ,s$ θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι $\begin{cases}3κ-s=1\\3κ+s=17\end{cases} \Leftrightarrow κ=3,\ s=8$.

Για $κ=3$ η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις τις $x_1=\frac{17}{6}$ και $x_2=\frac{1}{6}$, οπότε $\frac{a}{b}=\frac{17}{6}$ ή $\frac{a}{b}=\frac{1}{6}$, οπότε έχουμε για λύσεις τις $(a,b)=(17t,6t)$ ή $(a,b)=(t,6t)$ όπου t θετικός ακέραιος.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $b_1=(x-4)^2$, $b_2=x^2+16,...$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n,(n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $ω=x^2+16-(x-4)^2=8x.$

Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι: