Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των παραμέτρων $a,b\in\mathbb{R}, ab\neq 0$, έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2+ax+b=a|x|$$

να έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Είναι δυνατόν η εξίσωση να έχει τρεις διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $a\neq 0$ και $b\neq 0$.

Για $x\geq 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2+b=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-b},\ \text{εφόσον } b<0. \qquad (1)$$

Επομένως η εξίσωση έχει μία μόνο θετική ρίζα στο $\mathbb{R}$ την $x=\sqrt{-b}$, αν, και μόνον αν, $b<0$. Αν $b>0$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση στους πραγματικούς αριθμούς.

Για $x<0$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2+2ax+b=0, \qquad (2)$$

με διακρίνουσα $\Delta=4\left(a^2-b\right)$. Επομένως, η εξίσωση (2) έχει 2 ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν και μόνον αν, $a^2>b$. Όμως για να έχει δύο αρνητικές ρίζες $x_1<x_2<0$ στο $\mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί

$$\Delta=4\left(a^2-b\right)>0,\ x_1+x_2=-2a<0 \text{ και } x_1x_2=b>0\Leftrightarrow a^2>b,\ a>0, b>0.$$

Η εξίσωση (2) έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, αν και μόνον αν,

$$a^2>b \text{ και } b<0\Leftrightarrow b<0.$$

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων περιπτώσεων έχουμε:

- Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις, αν και μόνον αν,
$$a^2>b, a>0, b>0 \quad \text{ή} \quad b<0.$$
- Η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές λύσεις, αν και μόνον αν,
$$a^2>b, a>0, b>0 \text{ και } b<0, \ \textbf{(αδύνατο).}$$

Άρα η εξίσωση **δεν είναι δυνατόν** να έχει τρεις διαφορετικές λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+\ldots+x_{2017}+2017=0 \\ x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{2017}^4=\left(-x_1\right)^3+\left(-x_2\right)^3+\ldots+\left(-x_{2017}\right)^3 \end{array}\right\}.$$

Λύση

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$(x_1+1)+(x_2+1)+\ldots+(x_{2017}+1)=0. \qquad (1)$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται:

$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{2017}^4=-x_1^3-x_2^3+\ldots-x_{2017}^3$$

$$x_1^4+x_1^3+x_2^4+x_2^3+\ldots+x_{2017}^4+x_{2017}^3=0$$

$$x_1^3\left(x_1+1\right)+x_2^3\left(x_2+1\right)+\ldots+x_{2017}^3\left(x_{2017}+1\right)=0 \qquad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$(x_1+1)\left(x_1^3+1\right)+(x_2+1)\left(x_2^3+1\right)+\ldots+(x_{2017}+1)\left(x_{2017}^3+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+1)^2\left(x_1^2-x_1+1\right)+(x_2+1)^2\left(x_2^2-x_2+1\right)+\ldots+(x_{2017}+1)^2\left(x_{2017}^2-x_{2017}+1\right)=0$$

Επειδή ισχύει ότι: $x_i^2-x_i+1=\left(x_i-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,$ για κάθε $x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\ldots,2017$,

η τελευταία εξίσωση αληθεύει, αν, και μόνον αν,

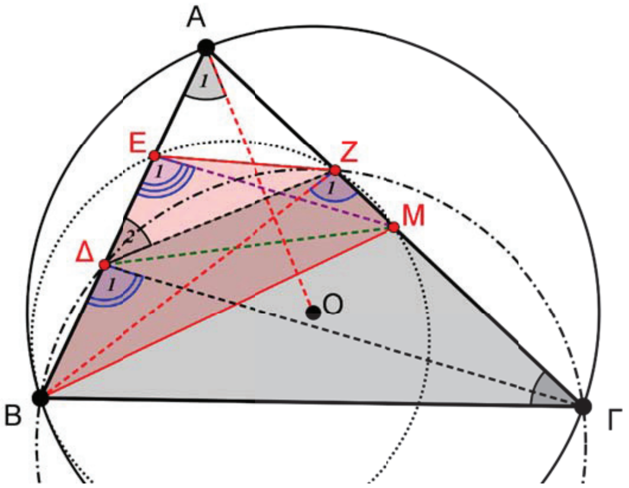
$$x_i+1=0,\ i=1,2,\ldots,2017 \Leftrightarrow x_i=-1,\ i=1,2,\ldots,2017 \Leftrightarrow x_1=x_2=\ldots=x_{2017}=-1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R) (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετη στην ακτίνα ΟΑ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και Μ το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ και Μ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

.

Λύση



Σχήμα 4

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι εγγράψιμο. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε: $\widehat{A}_1=90°-\widehat{\Gamma}$. Από την καθετότητα των ΟΑ και ΔΖ έχουμε: $\widehat{\Delta}_2=90°-\widehat{A}_1$. Από τις παραπάνω ισότητες γωνιών, συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{\Delta}_2=\widehat{\Gamma}$ και κατά συνέπεια, το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική).

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΔΖΓ, έχουμε: $\widehat{\Delta}_1=\widehat{Z}_1$. (η ΒΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ, Ζ υπό ίσες γωνίες)

Στο τρίγωνο ΑΔΓ, η ΕΜ συνδέει τα μέσα των πλευρών του ΑΔ και ΑΓ, οπότε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΔΓ, δηλαδή ΕΜ∥ΔΓ.

Από την παραλληλία ΕΜ∥ΔΓ, συμπεραίνουμε ότι : $\widehat{\Delta}_1=\widehat{E}_1$ (εντός εκτός επί τα αυτά γωνίες).

Άρα είναι: $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ και επομένως τα σημεία Β, Ε, Ζ και Μ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ρητών (a,b) που είναι τέτοια ώστε οι αριθμοί $\frac{ab+1}{a}$ και $\frac{ab+1}{b}$ να είναι και οι δύο ακέραιοι.

Λύση
Αφού οι αριθμοί

$$\frac{ab+1}{a} = p \text{ και } \frac{ab+1}{b} = q \qquad (1)$$

είναι θετικοί ακέραιοι, και το γινόμενό τους θα είναι θετικός ακέραιος. Δηλαδή, το κλάσμα $\frac{(ab+1)^2}{ab}$ είναι θετικός ακέραιος. Θέτουμε $ab = x$ και τότε

$$\frac{(x+1)^2}{x} = k,\, k > 0,\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Η τελευταία γράφεται:

$$x^2 + 2x + 1 = kx \Leftrightarrow x^2 + (2-k)x + 1 = 0\,. \qquad (2)$$

Ζητάμε η (2) να έχει ρητές λύσεις, επομένως η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Επομένως $(2-k)^2 - 4 = s^2$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο s.
Τότε $(k-2-s)(k-2+s) = 4$, επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

$$\begin{cases} k-2-s=1 \\ k-2+s=4 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} k-2-s=2 \\ k-2+s=2 \end{cases}$$

Η μόνη περίπτωση που δίνει λύσεις είναι η δεύτερη όπου $s = 0$ και $k = 4$.
Τότε η (2) γίνεται $(x-1)^2 = 0$, οπότε $x = 1$, δηλαδή $ab = 1$. (3)
Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $\frac{2}{a} = p$, $\frac{2}{b} = q$, οπότε η (3) γίνεται $pq = 4$, με p, q θετικούς ακεραίους. Έπεται ότι $(p,q) \in \{(1,4),(2,2),(4,1)\}$, οπότε έχουμε:

$$(a,b) \in \left\{ \left(2, \frac{1}{2}\right), (1,1), \left(\frac{1}{2}, 2\right) \right\}.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$x^4 - 32x^2 + 257 - \frac{4|x+2|}{x^2+4x+8} = 0\,.$$

Λύση
Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^4 - 32x^2 + 257 = \frac{4|x+2|}{x^2+4x+8} \qquad (1)$$

Το πρώτο μέλος της (1) γράφεται: