ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης**:**

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha-11\beta}{\beta}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\frac{\alpha}{\beta}=10$.

Λύση

1ος Τρόπος

$$\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}-11\right)=(2+10)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(10-11)$$
$$=12\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot500-18\cdot(-1)=2000+18=2018.$$

2ος Τρόπος

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta}=10$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=10\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+10\beta}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{10\beta-11\beta}{\beta}\right)=\left(\frac{12\beta}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{-\beta}{\beta}\right)$$
$$=\frac{12}{1}\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot500+18=2000+18=2018.$$

Πρόβλημα 2.
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

Λύση

Το γινόμενο των στοιχείων του συνόλου Α γράφεται:

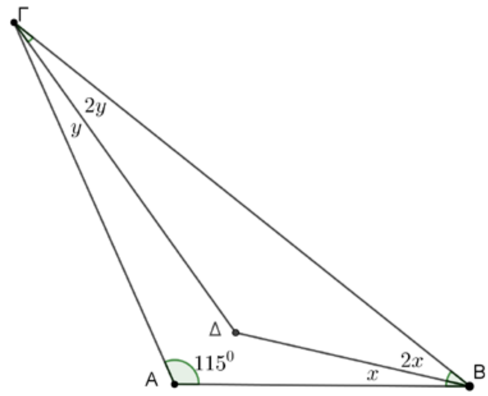
$$\Gamma=2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18\cdot20=2\cdot2^2\cdot2\cdot3\cdot2^3\cdot2\cdot5\cdot2^2\cdot3\cdot2\cdot7\cdot2^4\cdot2\cdot3^2\cdot2^2\cdot5=2^{18}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$$

Στο τελευταίο γινόμενο πρώτων παραγόντων πρέπει οι εκθέτες να είναι άρτιοι , οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει σίγουρα να αφαιρεθεί ο παράγοντας 7, ο οποίος υπάρχει μόνο στην ανάλυση του 14. Επομένως πρέπει να αφαιρεθεί ο αριθμός 14. Τότε το γινόμενο που προκύπτει είναι $\Gamma = 2^{17} \cdot 3^4 \cdot 5^2$ στο οποίο ο εκθέτης του 2 είναι περιττός. Για να γίνει άρτιος πρέπει να αφαιρεθεί περιττός αριθμός παραγόντων ίσων με 2. Για αυτό έχουμε δύο επιλογές. Η μία είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 2 και η άλλη είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 8. Στην πρώτη περίπτωση το γινόμενο που θα προκύψει είναι το $\Gamma_1 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^2 = \left(2^8 \cdot 3^2 \cdot 5\right)^2$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το γινόμενο είναι $\Gamma_2 = 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^2 = \left(2^7 \cdot 3^2 \cdot 5\right)^2$. Επομένως ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων του συνόλου Α που πρέπει να αφαιρέσουμε είναι 2, δηλαδή τους αριθμούς 2 και 14 ή τους αριθμούς 8 και 14.

Πρόβλημα 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 115^\circ$ θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A$ και $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 1

Αν θέσουμε $\Delta\hat{B}A = x$, τότε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A = 2x$. Ομοίως, αν $\Delta\hat{\Gamma}A = y$. τότε $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A = 2y$.

Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\hat{A} + 3x + 3y = 180^\circ \Rightarrow 3\left(x + y\right) = 180^\circ - 115^\circ \Rightarrow x + y = \frac{65^\circ}{3}.$$

Από το τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε

$$B\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 2x - 2y = 180^\circ - 2\left(x + y\right) = 180^\circ - 2 \cdot \frac{65^\circ}{3} = 180^\circ - \frac{130^\circ}{3} = \frac{410^\circ}{3}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρεθεί πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του..

Λύση

Έστω x τα κέρματα των δύο ευρώ που είχε αρχικά. Αφού χρησιμοποίησε το ένα τρίτο αυτών, σημαίνει ότι το x είναι πολλαπλάσιο του 3 και ότι το ένα τρίτο αυτών ισούται με $\frac{x}{3}$ και αυτά έχουν αξία $\frac{2x}{3}$. Η αξία των χρημάτων που έδωσε την πρώτη μέρα είναι $\frac{2x}{3}$, επομένως τη δεύτερη μέρα του απέμειναν $\frac{2x}{3}\cdot 2+40-x=40+\frac{x}{3}$ ευρώ. Αφού ξόδεψε το 40% αυτών, τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\left(40+\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{4}{10}=16+\frac{2x}{15}$ ευρώ. Επομένως συνολικά, την πρώτη και τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $2\cdot\frac{x}{3}+16+\frac{2x}{15}=16+\frac{12x}{15}$ ευρώ.

Από την εκφώνηση ξέρουμε τώρα ότι ξόδεψε 40 ευρώ, οπότε

$$16+\frac{12x}{15}=40 \Leftrightarrow \frac{12x}{15}=24 \Leftrightarrow 12x=360 \Leftrightarrow x=30.$$

Επομένως είχε αρχικά μαζί του 30 κέρματα των δύο ευρώ και 10 κέρματα του ενός ευρώ με συνολική αξία 70 ευρώ.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2,$$

αν δίνεται ότι $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\gamma=-\frac{18}{2^3}$, $\delta=\frac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, $\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$, $\gamma=-\frac{18}{8}=-\frac{9}{4}$, $\delta=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{81}{16}+\frac{1}{64}=\frac{325}{64}\ ,\ \gamma^2+\delta^2=\left(-\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{81}{16}+\frac{1}{64}=\frac{325}{64},$$

$$\alpha\gamma+\beta\delta=\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{8}=-\frac{81}{16}-\frac{1}{64}=-\frac{325}{64}\Rightarrow\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2=\left(-\frac{325}{64}\right)^2.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2=\frac{325}{64}\cdot\frac{325}{64}-\left(-\frac{325}{64}\right)^2=0$.

2ος Τρόπος

$$\mathrm{A}=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)-(\alpha\gamma+\beta\delta)^2=$$