Αν τώρα πάρουμε έναν οποιαδήποτε εξαψήφιο $\overline{\beta\gamma 9144}$ και τον πολλαπλασιάσουμε με τον 2007, τα τέσσερα τελευταία ψηφία του γινομένου δεν επηρεάζονται άρα λήγει και αυτός σε 2008. Για το διψήφιο τμήμα $\overline{\beta\gamma}$ έχουμε επιλογές από 10 έως 99. Επομένως έχουμε συνολικά 90 επιλογές, άρα έχουμε 90 εξαψήφιους με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_5 = x^5 + y^5$ είναι ακέραιος.

Λύση

Επειδή, έχουμε ότι:

$$x^5 + y^5 = \left(x^4 + y^4\right)\left(x + y\right) - x^4 y - xy^4 = \left(x^4 + y^4\right)\left(x + y\right) - xy\left(x^3 + y^3\right),$$

και οι αριθμοί $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, αρκεί να αποδείξουμε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Επειδή $x^3 + y^3 = \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $xy \in \mathbb{Z}$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$a_1^2 - a_2 = \left(x + y\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right) = 2xy \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

$$a_2^2 - a_4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^4 + y^4\right) = 2x^2 y^2 \in \mathbb{Z}, \qquad (2)$$

αφού $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{Z}$. Από την (1) έπεται ότι: $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2}$.

Θα αποδείξουμε ότι $xy \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2} \notin \mathbb{Z}$, τότε θα είχαμε $a_1^2 - a_2 = m$ περιττός ακέραιος, οπότε από τη σχέση (2) θα είχαμε ότι

$$2x^2 y^2 = 2 \cdot \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{4} = \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{2} = \frac{m^2}{2} \notin \mathbb{Z},$$

αφού m περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αντίκειται στη σχέση (2). Επομένως αληθεύει ότι $xy \in \mathbb{Z}$.

Άρα έχουμε:

$$x^3 + y^3 = \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z},$$

αφού $x + y,\ xy \in \mathbb{Z}$.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$x^3 + y^3 = \left(x^2 + y^2\right)\left(x + y\right) - xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z}, \text{ αφού } x^2 + y^2,\ x + y,\ xy \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση:

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 3} > \frac{x + a}{x^2 + x + 1}.$$

Λύση

Επειδή $x^2+2x+3=\left(x+1\right)^2+2>0,\ x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R},$ η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x\left(x^2+x+1\right)>\left(x^2+2x+3\right)\left(x+a\right)\Leftrightarrow x^3+x^2+x>x^3+2x^2+3x+ax^2+2ax+3a$$

$$\Leftrightarrow\left(a+1\right)x^2+2\left(a+1\right)x+3a<0. \qquad (1)$$

Για $a=-1$, η ανίσωση (1) γίνεται: $-3<0$ και αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $a\neq-1$, το πρώτο μέλος της ανίσωσης είναι τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta=4\left(a+1\right)^2-12a\left(a+1\right)=4\left(a+1\right)\left(a+1-3a\right)=-4\left(a+1\right)\left(2a-1\right).$$

Η ανίσωση (1) αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$a+1<0 \text{ και } -4\left(a+1\right)\left(2a-1\right)<0\Leftrightarrow a+1<0 \text{ και } 4\left(a+1\right)\left(2a-1\right)>0$$

$$\Leftrightarrow a<-1 \text{ και } a<-1 \text{ ή } a>\frac{1}{2}\Leftrightarrow a<-1.$$

Επομένως το ζητούμενο αληθεύει για κάθε $a\leq-1.$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α,β ώστε $\beta=2\alpha$. Στο εσωτερικό του θεωρούμε N κύκλους (που πιθανόν τέμνονται), έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{N}\geq4$.

Λύση

Έστω $d_1,d_2,...,d_N$ οι διάμετροι των κύκλων. Τότε το μήκος του πρώτου κύκλου είναι $2\pi R_1=\pi d_1$, το μήκος του δεύτερου $2\pi R_2=\pi d_2$, το μήκος του N-οστού είναι $2\pi R_{\mathrm{N}}=\pi d_{\mathrm{N}}$. Αφού το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου, θα έχουμε

$$\pi d_1+...+\pi d_{\mathrm{N}}=2(2\alpha+2\beta)=4(\alpha+\beta)=4(\alpha+2\alpha)=12\alpha \qquad (1).$$

Για να χωράει όμως κάθε κύκλος στο ορθογώνιο θα πρέπει η διάμετρός του να είναι το πολύ όσο η μικρότερη πλευρά του ορθογωνίου, δηλαδή $d_1\leq\alpha,d_2\leq\alpha,...,d_N\leq\alpha$, οπότε

$$\pi d_1+...+\pi d_{\mathrm{N}}\leq\alpha\pi+...+\alpha\pi=\mathrm{N}\alpha\pi \qquad (2)$$

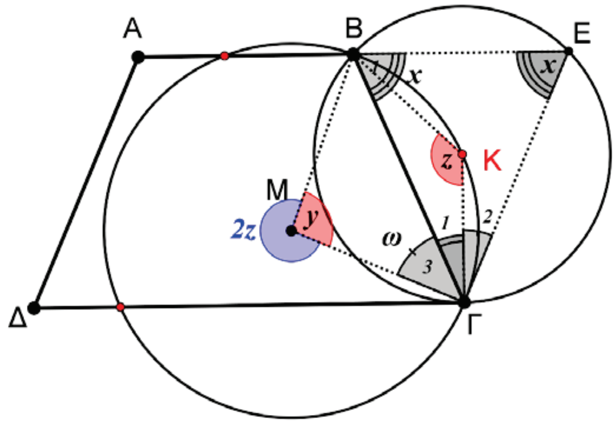
Από (1) και (2) έχουμε $\mathrm{N}\alpha\pi\geq12\alpha\Leftrightarrow\mathrm{N}\geq\frac{12}{\pi}$ και αφού ο Ν είναι ακέραιος, $\mathrm{N}\geq4$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ $(AB\mathbin{/\!/}\Gamma\Delta)$ για το οποίο ισχύει $\Gamma\Delta=2AB$. Αν E είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς το B και K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $B\Gamma E$ να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου

$ΒΓΕ$ εφάπτεται στην $ΓΔ$ στο σημείο $Γ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΚ$ εφάπτεται στην $ΓΕ$ στο σημείο $Γ$.

Λύση



Σχήμα 4

Έστω $Μ$ το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΒΓΚ$.

Θα αποδείξουμε ότι $ΚΓ \perp ΓΔ$ και $ΜΓ \perp ΓΕ$.

Εφόσον $Ε$ είναι το συμμετρικό του σημείου $Α$ ως προς το $Β$, θα ισχύει $ΑΕ = 2ΑΒ$.

Άρα $ΑΕ = ΔΓ = 2ΑΒ$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $ΑΕΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο (έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες).

Άρα $ΓΕ = ΑΔ = ΒΓ$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $ΒΓΕ$ είναι ισοσκελές ($ΓΕ = ΒΓ$) οπότε το περίκεντρό του θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο της $ΒΕ$ που είναι η $ΓΚ$ (διότι $Γ, Κ$ ισαπέχουν από τα άκρα του $ΒΕ$).

Άρα $ΚΓ \perp ΒΕ \parallel ΓΔ \Rightarrow ΚΓ \perp ΓΔ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $ΒΓΕ$ έχουμε: $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = 180° - 2\hat{x}$.

Η γωνία $Β\hat{Κ}Γ = \hat{z}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $Β\hat{Ε}Γ = \hat{x}$ (στο περιγεγραμμένο κύκλο του ισοσκελούς τριγώνου $ΒΓΕ$), άρα $\hat{z} = 2\hat{x}$ και κατά συνέπεια $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = 180° - \hat{z}$.

Η γωνία $Β\hat{Κ}Γ = \hat{z}$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΒΚΓ$ και η μη κυρτή γωνία $Β\hat{Μ}Γ = 2\hat{z}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη.

Αν θέσουμε $\hat{Γ}_3 = \hat{ω}$, τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $ΜΒΓ$ έχουμε:

$2\hat{ω} + \hat{y} = 180° \Leftrightarrow 2\hat{ω} + 360° - 2\hat{z} = 180° \Leftrightarrow \hat{ω} = \hat{z} - 90°$.

Άρα $\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 + \hat{Γ}_3 = 180° - \hat{z} + \hat{z} - 90° = 90°$.