ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
19 Ιανουαρίου 2019

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\frac{\alpha}{\beta}=3$.

Λύση
1ος Τρόπος

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=3\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(\frac{3\beta^2+9\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{9\beta^2-3\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{12\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{6\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)=(12-10)\left(\frac{2}{3}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot\frac{15}{3}=10.$$

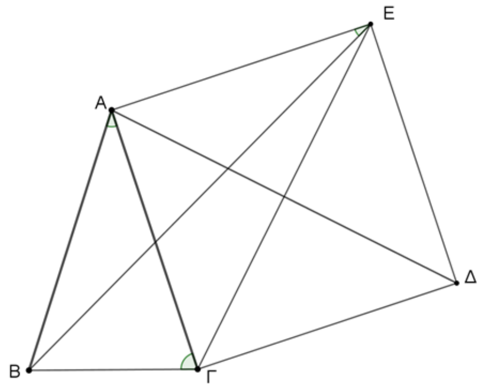
2ος Τρόπος

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{3}$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(3+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-10\right)\cdot\left(1-3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{13}{3}\right)$$

$$=\left(3+3^2-10\right)\cdot\left(1-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{13}{3}\right)=(3+9-10)\cdot\left(1-\frac{3}{9}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot(+5)=10.$$

Πρόβλημα 2



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και $\hat{\Gamma} = 2\cdot\hat{\text{Α}}$. Το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Delta$ και $\text{Β}\hat{\text{Ε}}\Gamma$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο φύλλο με τις απαντήσεις σας.

Λύση

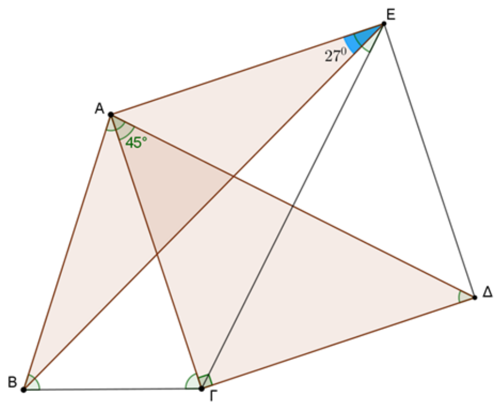
(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ έπεται ότι $\hat{\Gamma} = \hat{\text{Β}} = 2\cdot\hat{\text{Α}}$, οπότε από τη σχέση $\hat{\text{Α}} + \hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ έπεται ότι:

$$\hat{\text{Α}} + 2\hat{\text{Α}} + 2\hat{\text{Α}} = 180^\circ \Rightarrow 5\hat{\text{Α}} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\text{Α}} = 36^\circ.$$

Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, αφού $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} = \text{ΑΕ}$ και ισχύει ότι

$$\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Ε} = \text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma + \Gamma\hat{\text{Α}}\text{Ε} = 36^\circ + 90^\circ = 126^\circ,$$

οπότε θα είναι $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = \dfrac{180^\circ - \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Ε}}{2} = \dfrac{180^\circ - 126^\circ}{2} = 27^\circ$.



Σχήμα 1

(β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ορθή γωνία $\text{Α}\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$, οπότε οι οξείες γωνίες του θα είναι 45° η καθεμία, δηλαδή $\Gamma\hat{\text{Α}}\Delta = 45^\circ$. Επομένως είναι

$$\text{Β}\hat{\text{Α}}\Delta = \text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma + \Gamma\hat{\text{Α}}\Delta = 36^\circ + 45^\circ = 81^\circ.$$

Ομοίως, από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ με $\Gamma\hat{\text{Α}}\text{Ε} = 90^\circ$ προκύπτει ότι: $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma = 45^\circ$, οπότε $\text{Β}\hat{\text{Ε}}\Gamma = \text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma - \text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ$.

Πρόβλημα 3

Για τη φωταγώγηση μιας πλατείας, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοποθετήθηκαν περιμετρικά 182 κολώνες φωτισμού. Τέσσερις από αυτές τοποθετήθηκαν στις γωνίες τις πλατείας. Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν και οι υπόλοιπες 178 στην περίμετρο της πλατείας έτσι ώστε κάθε δύο διαδοχικές κολώνες απέχουν τέσσερα μέτρα. Επίσης διαπιστώθηκε ότι η μεγαλύτερη πλευρά της πλατείας είχε διπλάσιες κολώνες από τη μικρή πλευρά, όπου σε κάθε πλευρά μετράμε και τις κολώνες στις γωνίες. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών της πλατείας. **Σημείωση**: *Θεωρείστε τις κολώνες πάνω στις πλευρές της πλατείας ως σημεία.*

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η μικρή πλευρά του ορθογωνίου είναι α μέτρα και η μεγάλη β μέτρα.

Τότε αφού κάθε δύο κολώνες απέχουν 4 μέτρα, η μικρή πλευρά θα έχει $\frac{\alpha}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων των γωνιών.

Ομοίως η μεγάλη πλευρά θα έχει $\frac{\beta}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων και των γωνιών, οπότε, αφού η μεγάλη πλευρά έχει διπλάσιες κολώνες από τη μικρή, θα έχουμε ότι

$$\frac{\beta}{4}+1=2\left(\frac{\alpha}{4}+1\right)\Rightarrow \beta=2\alpha+4.$$

Όμως συνολικά οι κολώνες είναι 182 και απέχουν τέσσερα μέτρα μεταξύ τους, οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $182\cdot 4=728$, δηλαδή $2\alpha+2\beta=728\Rightarrow a+\beta=364$.

Επομένως, με αντικατάσταση της τιμής του β, έχουμε:

$$\alpha+2\alpha+b=364\Rightarrow 3\alpha+4=364\Rightarrow \alpha=120. \text{ και } \beta=244.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό εξαψήφιο ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

Λύση

(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 12600 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $12600=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.

Προφανώς ο οκταψήφιος ακέραιος 22233557 έχει γινόμενο ψηφίων 126000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα εξετάσουμε τη δυνατότητα να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8=2\cdot 2\cdot 2$ και το $9=3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Έτσι λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο $\mathbf{A=55789}$ ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 12600. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία 2, $4=2\cdot 2$, $9=3\cdot 3$ ή 2, $6=2\cdot 3$, $6=2\cdot 3$. Τότε όμως προκύπτει εξαψήφιος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από τον πενταψήφιο 55789.

(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 245599 ή 255669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 55789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος **155789** που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.