Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma \ ,$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\beta = (-2)^{-2}$, $\gamma = -\frac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι: $\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$, $\beta = (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$, $\gamma = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma \\
&= \left(-\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(-\frac{1}{8}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{8}\right) \\
&= -\frac{1}{8^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} - \frac{3}{4\cdot 8^2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{\left(2^3\right)^3} + \frac{1}{\left(2^2\right)^3} - \frac{1}{\left(2^2\right)^3} - \frac{3}{2^2\cdot\left(2^3\right)^2} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^9} - \frac{3}{2^2\cdot 2^6} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{2^9} + \frac{1}{2^6} - \frac{3}{2^8} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^6} - \frac{3}{2^8} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{-1+4-3}{2^8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.

(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό επταψήφιο ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.

(γ) Μπορούμε να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000;

Λύση

(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 63000 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $63000 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.
Προφανώς ο ακέραιος 222335557 έχει γινόμενο ψηφίων 630000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα πρέπει να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8 = 2\cdot 2\cdot 2$ και το $9 = 3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία 2, $4 = 2\cdot 2$, $9 = 3\cdot 3$ ή 2, $6 = 2\cdot 3$, $6 = 2\cdot 3$.

Έτσι λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο $\mathbf{A = 555789}$ ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 63000.

(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 2455599 ή 2555669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 555789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος **1555789** που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.

(γ) Αν υποθέσουμε ότι βρήκαμε το μεγαλύτερο δυνατό ακέραιο Α του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000, τότε διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ακέραιος μεγαλύτερος από τον Α που ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα. Αυτός προκύπτει από τον Α με τοποθέτηση στο τέλος του ενός επιπλέον ψηφίου ίσου με το 1. Αυτό είναι άτοπο, από την υπόθεση για τον ακέραιο Α.

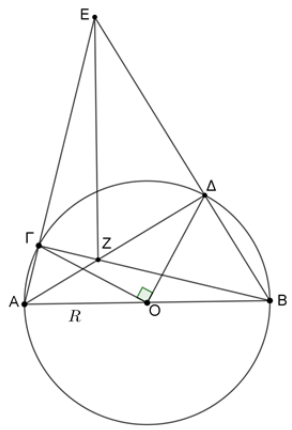
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος διαμέτρου $AB = 2R$ και η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ$. Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ, ενώ οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}\Delta$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $EZ = 2R$.

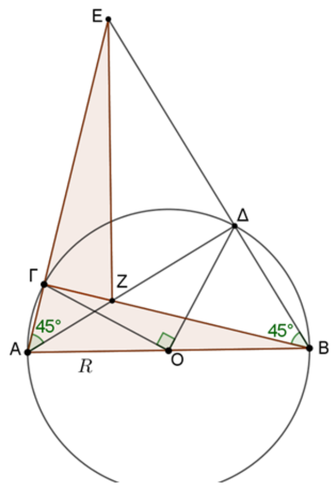
Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*



Λύση

(α) Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ στο οποίο βαίνει και η επίκεντρη γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ$. Άρα είναι

$$\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$



Σχήμα 2

(β) Επειδή $\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = 90^\circ$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} = 45^\circ$, το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma Z}$. Επειδή $\mathrm{A\hat{\Gamma}E} = 180^\circ - \mathrm{A\Gamma B} = 90^\circ$ και $\mathrm{\Gamma\hat{B}E} = \mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = 45^\circ$, το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma E}$.
Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΕΖ έχουν τις δύο κάθετες πλευρές του ίσες μία προς μία, δηλαδή μία κάθετη πλευρά ίση $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma Z}$ και $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma E}$. Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\mathrm{EZ} = \mathrm{AB} = 2R$.

Πρόβλημα 4
Έχουμε πέντε κάρτες Α, Β, Γ, Δ, Ε που πάνω σε καθεμία από αυτές είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Με αυτές τις κάρτες σχηματίζονται συνολικά δέκα διαφορετικές τριάδες. Για καθεμία από αυτές τις τριάδες, καταγράφουμε το άθροισμα των τριών καρτών. Διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν δύο μόνο διαφορετικά αθροίσματα, το 15 και το 13. Να προσδιορίσετε τους δυνατούς αριθμούς των πέντε καρτών.

Λύση
Επειδή τα δυνατά αθροίσματα των τριάδων είναι μόνο δύο, το 15 και το 13 συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να υπάρχουν τρεις κάρτες με διαφορετικούς αριθμούς.
Πράγματι, αν υπήρχαν τρεις κάρτες με διαφορετικούς μεταξύ τους αριθμούς , έστω x, y, z και οι άλλες δύο κάρτες είχαν τους αριθμούς α και β, τότε θα είχαμε συνολικά τρία διαφορετικά αθροίσματα της μορφής $\alpha+\beta+x, \alpha+\beta+y, \alpha+\beta+z,$ το οποίο είναι αντίθετο στην υπόθεση.
Επίσης συμπεραίνουμε ότι δεν είναι δυνατόν όλες οι κάρτες να έχουν τον ίδιο αριθμό, γιατί τότε θα είχαμε ένα μόνο δυνατό άθροισμα τριάδων.
Επομένως πάνω στις κάρτες υπάρχουν δύο διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι, έστω x, y , με $x > y.$ Τότε τα δυνατά αθροίσματα τριάδων, διατεταγμένα από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο, είναι:

$$x+x+x = 3x > x+x+y = 2x+y > x+y+y = x+2y > y+y+y = 3y.$$

Επειδή τα δυνατά αθροίσματα είναι μόνο δύο, παρατηρούμε ότι ο αριθμός y πρέπει να υπάρχει μία μόνο φορά, γιατί:

- Αν το y υπάρχει σε τέσσερις κάρτες, τότε το x θα υπάρχει μόνο σε μία κάρτα και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $x+2y = 15,\ 3y = 13$, που δεν δίνει ακέραιες τιμές για τα x, y.
- Αν το y υπάρχει σε τρεις κάρτες, τότε το x θα υπάρχει σε δύο κάρτες και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $2x+y > x+2y > 3y$, δηλαδή τρία διαφορετικά.
- Αν το y υπάρχει σε δύο κάρτες, τότε το x θα υπάρχει σε τρεις κάρτες και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $3x > 2x+y > x+2y$, δηλαδή τρία διαφορετικά.

Επομένως, τα δυνατά αθροίσματα είναι τα :

$$x+x+x = 3x,\ x+x+y = 2x+y, \text{ με } 3x > x+2y,$$

οπότε έχουμε:

$$3x = 15,\ 2x+y = 13 \Leftrightarrow x = 5,\ y = 3.$$

Επομένως, μία κάρτα έχει τον αριθμό 3 και οι υπόλοιπες τέσσερις έχουν τον αριθμό 5.