$$\mathrm{E}_{(\mathrm{ABE\Gamma})} = \mathrm{E}_{(\mathrm{ABE})} + \mathrm{E}_{(\mathrm{AE\Gamma})} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AE}\cdot\mathrm{BO} + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AE}\cdot\Gamma\mathrm{M} = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot R + \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot\frac{R}{2} = \frac{3R^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση: $\left||x+8|-3x\right| = \frac{x+7}{6}$.

Λύση

Λόγω της ύπαρξης των απόλυτων τιμών θα εργαστούμε σε κατάλληλα διαστήματα που θα μας επιτρέπουν να αποφύγουμε τις απόλυτες τιμές. Παρατηρούμε πρώτα ότι, λόγω της απόλυτης τιμής στο πρώτο μέλος, πρέπει: $\frac{x+7}{6} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$.

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$|x+8-3x| = \frac{x+7}{6} \Leftrightarrow |8-2x| = \frac{x+7}{6} \qquad (1).$$

Επειδή το πρόσημο του όρου $8-2x$ αλλάζει εκατέρωθεν του 4, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $-7 \leq x < 4$. Τότε

$$(1) \Leftrightarrow 8-2x = \frac{x+7}{6} \Leftrightarrow 48-12x = x+7 \Leftrightarrow 13x = 41 \Leftrightarrow x = \frac{41}{13} < 4,$$

η οποία είναι δεκτή γιατί ανήκει στο διάστημα $[-7, 4)$.

(β) $x \geq 4$. Τότε

$$(1) \Leftrightarrow 2x-8 = \frac{x+7}{6} \Leftrightarrow 12x-48 = x+7 \Leftrightarrow 11x = 55 \Leftrightarrow x = 5 > 4, \text{ δεκτή.}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x+2y = y+3z = z+5x,$$

να βρείτε:

(α) Την τιμή των λόγων $\frac{x}{y}$ και $\frac{z}{y}$.

(β) Τις τιμές των x, y, z για τις οποίες η παράσταση $x^2+y^2+z^2-2y-144$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση

Αν θέσουμε $x+2y = y+3z = z+5x = t$, τότε έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y=t \\ y+3z=t \\ z+5x=t \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+2y=t \\ -2y-6z=-2t \\ 6z+30x=6t \end{array}\right\} \Rightarrow 31x = 5t \Rightarrow x = \frac{5t}{31}.$$

Τότε λαμβάνουμε:

$$x+2y=t \Rightarrow \frac{5t}{31}+2y=t \Rightarrow 2y=\frac{26t}{31} \Rightarrow y=\frac{13t}{31},$$

$$z+5x=t \Rightarrow z+\frac{25t}{31}=t \Rightarrow z=\frac{6t}{31}.$$

Επομένως έχουμε: $\frac{x}{y}=\frac{5}{13},\ \frac{z}{y}=\frac{6}{13}$.

(β) Εκφράζουμε την παράσταση συναρτήσει της μεταβλητής y , οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{5}{13}y\right)^2+y^2+\left(\frac{6}{13}y\right)^2-2y-144=\frac{230}{169}y^2-2y-144=f(y),$$

Επειδή ο συντελεστής του y^2 είναι θετικός, η παράσταση παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $y=-\frac{-2}{2\cdot\frac{230}{169}}=\frac{169}{230}$. Τότε είναι $x=\frac{5}{13}y=\frac{5}{13}\cdot\frac{169}{230}=\frac{13}{46},\ \ z=\frac{6}{13}\cdot\frac{169}{230}=\frac{78}{230}=\frac{39}{115}$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (x,y) που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9=0$$

και ανήκουν στο ορθογώνιο $D=\left\{(x,y):-\pi\le x\le\pi,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$ του Καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{O}xy$.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9=0\Leftrightarrow x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9\left[\sigma\upsilon\nu^2(xy)+\eta\mu^2(xy)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[x+3\sigma\upsilon\nu(xy)\right]^2+\left[3\eta\mu(xy)\right]^2=0\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x+3\sigma\upsilon\nu(xy)=0\\3\eta\mu(xy)=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x+3\cdot(\pm1)=0\\\eta\mu(xy)=0\end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=-3\\\eta\mu(-3y)=0\end{Bmatrix}\text{ ή }\begin{Bmatrix}x=3\\\eta\mu(3y)=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=-3\\3y=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{Bmatrix}\text{ ή }\begin{Bmatrix}x=3\\3y=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=-3\\y=\frac{\kappa\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{Bmatrix}\text{ ή }\begin{Bmatrix}x=3\\y=\frac{\kappa\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow(x,y)=\left(-3,\frac{\kappa\pi}{3}\right),\kappa\in\mathbb{Z}\ \acute{\eta}\ (x,y)=\left(3,\frac{\kappa\pi}{3}\right),\kappa\in\mathbb{Z}$$

Για να ανήκουν τα παραπάνω ζεύγη στο ορθογώνιο D πρέπει

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\kappa\pi}{3}\le\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}\le\kappa\le\frac{3}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\kappa\in\{-1,0,1\},$$

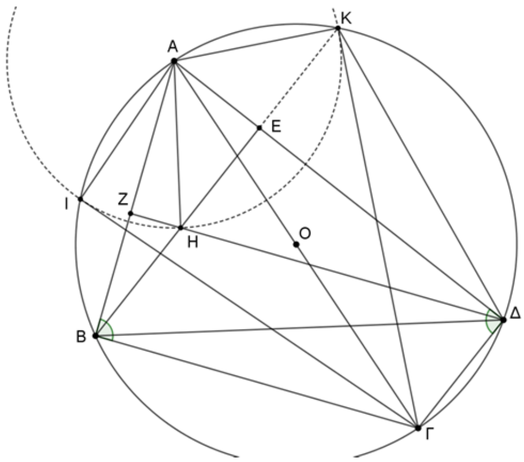
οπότε προκύπτουν τα ζεύγη:

$$\left(\pm3,-\frac{\pi}{3}\right),(\pm3,0),\left(\pm3,\frac{\pi}{3}\right).$$

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο $C_1(\mathrm{O},R)$ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}=90^\circ$.Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ. Ο κύκλος $C_2(\mathrm{A},\mathrm{AH})$ κέντρου Α και ακτίνας ΑΗ τέμνει τον κύκλο $C_1(\mathrm{O},R)$ στα σημεία Ι και Κ. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\mathrm{I}=\Gamma\mathrm{K}=\mathrm{B}\Delta$.

Λύση



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα ΓΙΚ και ΓΚΑ είναι ορθογώνια, αφού η ΑΓ είναι διάμετρος και έχουν κοινή υποτείνουσα και $\mathrm{AI} = \mathrm{AK}$, ως ακτίνες του κύκλου $C_2\left(\mathrm{A}, \mathrm{AH}\right)$. Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και θα έχουν και $\Gamma\mathrm{I} = \Gamma\mathrm{K}$.

Επειδή η ΒΚ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΔ, έχουμε ότι: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$.

Έχουμε επιπλέον ότι:

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{K}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (γιατί ΓΖ ύψος του τριγώνου ΑΒΔ).

Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$, οπότε τα σημεία Α, Η, Ε, Κ είναι συνευθειακά. Επειδή επιπλέον οι ευθείες ΒΚ και ΓΔ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ευθεία ΑΔ, έπεται ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C_1\left(\mathrm{O}, R\right)$ και άρα ισοσκελές. Επομένως οι διαγώνιοι του ΓΚ και ΒΔ είναι ίσες.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε πόσοι θετικοί ακέραιοι της μορφής

$$\mathrm{A} = \overline{xxxabc} = x\cdot 10^5 + x\cdot 10^4 + x\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c,$$

όπου x, a, b, c ψηφία με $x \neq 0$, διαιρούνται με το 37.

Λύση

Ο ακέραιος Α μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathrm{A} = \overline{xxxabc} = x\cdot 10^3 \cdot 111 + a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c = x\cdot 10^3\cdot 3\cdot 37 + \overline{abc} = \pi o\lambda.37 + \overline{abc},$$

για κάθε $x \in \{1, 2, ..., 9\}$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η ισοδυναμία

$$37 \mid \mathrm{A} \Leftrightarrow 37 \mid \overline{abc}.$$

Όμως όλοι οι το πολύ τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι που διαιρούνται με το 37 είναι της μορφής $37\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$, που ικανοποιούν τη σχέσεις $0 \leq 37\kappa \leq 999$. Έχουμε

$$0 \leq 37\kappa \leq 999, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \leq \kappa \leq 27, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως υπάρχουν 28 θετικοί ακέραιοι με τρία το πολύ ψηφία που διαιρούνται με το 37 και επειδή για το σχηματισμό των πρώτων τριών ψηφίων του Α υπάρχουν 9 δυνατές