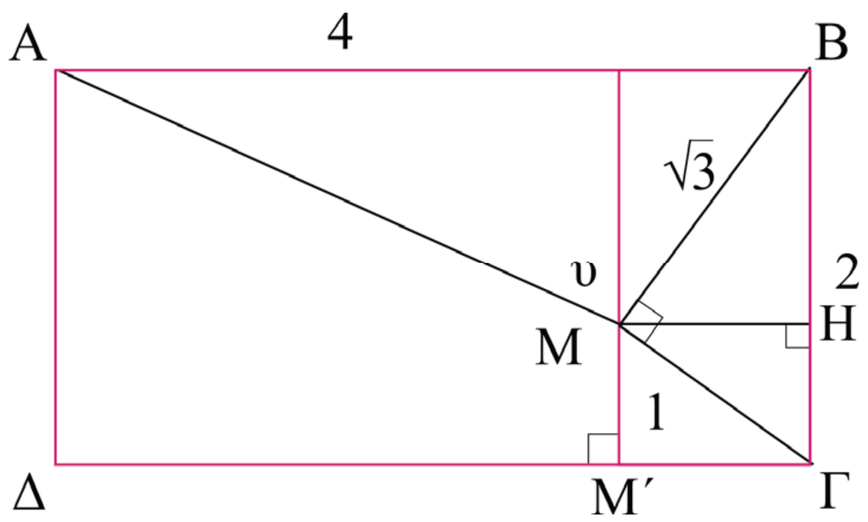
<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Β΄ τάξη Λυκείου

1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες , τότε

$$x_1 + x_2 = 2006\kappa + 1 \quad (1) \text{ και } x_1 \cdot x_2 = 2007 \quad (2).$$

Από την (2) προκύπτει ότι οι x_1, x_2 θα είναι περιττοί. Αλλά τότε το άθροισμα τους $x_1 + x_2$ θα είναι άρτιος, οπότε δεν θα ισχύει η (1).

2.



Παρατηρούμε ότι $\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4 = 2^2$ οπότε το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο στο Μ. Επειδή

$$\text{ΜΓ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2} \text{ έχουμε } \widehat{\text{ΜΒΓ}} = 30^0,$$

οπότε $\widehat{\text{ΜΓΒ}} = 60^0$ *και* $\widehat{\text{ΜΓΔ}} = 30^0$. Έστω

$MM' \perp \Delta\Gamma$, τότε $MM' = \dfrac{1}{2}$ άρα $\upsilon = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. Το εμβαδόν του $\overset{\Delta}{MAB}$ είναι $E = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$..

<u>β΄ τρόπος</u>

$MB^2 = B\Gamma \cdot BH$ οπότε $3 = 2 \cdot \upsilon$ άρα $\upsilon = \dfrac{3}{2}$

3. Είναι

$$\kappa = (2+2^2+2^3+2^4) + 2^4(2+2^2+2^3+2^4) + \ldots + 2^{2004}(2+2^2+2^3+2^4) =$$

$$= 30(1+2^4+2^8+\ldots+2^{2004}) = \pi o\lambda.\,30$$

4. α) Από τη γνωστή ανισότητα: $\dfrac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta}$ όπου α, β θετικοί με $\alpha \neq \beta$, έχουμε:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{2} > \sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{6}$$

Οπότε $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} > 2\sqrt[6]{6}$.

Αρκεί λοιπόν

$$2\sqrt[6]{6} \geq \sqrt[3]{19}, \quad ή \quad 2^6 \cdot 6 \geq 19^2, \quad ή \quad 384 \geq 361$$

που ισχύει.

β) Αν $\lambda = \dfrac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ τότε

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{19}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \ \textit{οπότε} \ \lambda^2 < 2.$$

Η εξίσωση για $x \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την

$x^2 - 2\lambda x + 2 = 0$ με $\Delta = 4(\lambda^2 - 2) < 0$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

β΄ τρόπος

$$x^2 - 2\lambda x + 2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + 2 =$$

$$= (x-\lambda)^2 + (2-\lambda^2) \geq 2 - \lambda^2 > 0$$

ΛΥΣΕΙΣ Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Για $x = 0$ έχουμε $f(f(y)) = -f(y) \ \textit{για κάθε} \ y \in \mathbb{R}$.

Για $y = 0$ έχουμε $f(f(x)) = x - f(0) \ \textit{για κάθε} \ x \in \mathbb{R}$.

Άρα

$$f(f(x)) = -f(x) \ \textit{και} \ f(f(x)) = x - f(0), \ \textit{για κάθε} \ x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$-f(x) = x - f(0)$ ή

$f(x) = f(0) - x \quad (1) \quad$ και $\quad f(-x) = f(0) + x \quad (2), \ \textit{για κάθε} \ x \in \mathbb{R}$

Οπότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) + f(-x) = 2f(0), \ \textit{για κάθε} \ x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι σταθερή.

2. Έστω ότι η εξίσωση έχει μια ακέραια λύση ρ. Τότε