ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν ***ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ,*** τα οποία θα **ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα** που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει **η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών** των θεμάτων στους μαθητές.
3. **Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.**
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτεύεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα,** αφού πρώτα στα παραρτήματα , εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε. και δεν προβλέπεται Αναβαθμολόγηση (διότι γίνεται εσωτερικά).
9. **Ο «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ»** θα διενεργηθεί στις **19 Ιανουαρίου 2008** και η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών **«ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»** θα γίνει στις **23 Φεβρουαρίου 2008** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στη **25η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (ΠΓΔΜ, Μάιος 2008),** στην **12η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Αλβανία, Ιούνιος 2008)** και στην **49η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Μαδρίτη Ισπανίας, Ιούλιος 2008).**
10. **Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν αφιλοκερδώς στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.**

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Νικόλαος Αλεξανδρής

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

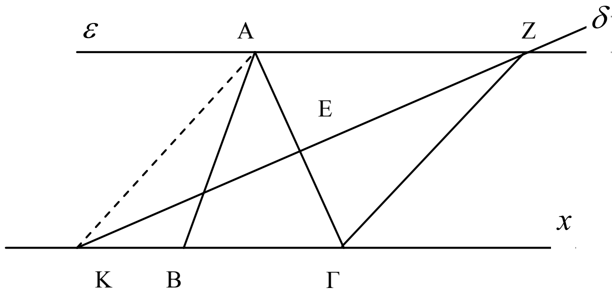
Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=-\left[(-2)^8:(-4)^2+(-4)^2\right]:(-2)^4,\quad \mathrm{B}=-(x-3)-3(y-4)-\left[x(y-2)-y(x+3)\right].$$

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $\mathrm{A}>\mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.



(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x$,
(β) Να αποδείξετε ότι ΚΑ = ΑΖ.

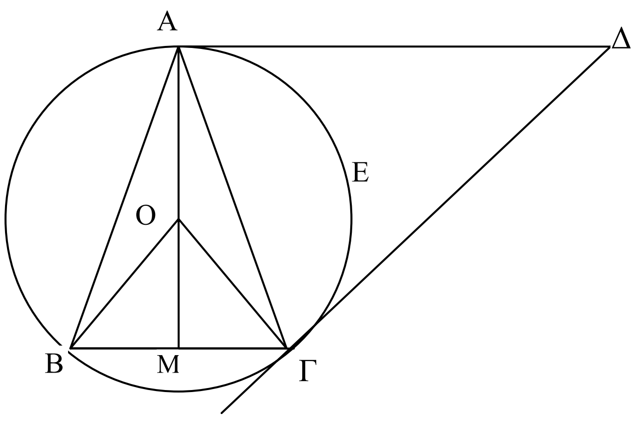
Πρόβλημα 3

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\Sigma=\{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $\mathrm{A}=aaabb$, όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 30^\circ$. Η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και η ΓΔ είναι κάθετη προς την ΟΓ.



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΕΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α .

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $$\mathrm{A} = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4 = -\left[2^8 : 4^2 + 4^2\right] : 2^4$$
$$= -\left[2^8 : \left(2^2\right)^2 + 4^2\right] : 2^4 = -\left(2^8 : 2^4 + 4^2\right) : 2^4$$
$$= -\left(2^4 + 4^2\right) : 2^4 = -32 : 16 = -2.$$
$$\mathrm{B} = -(x-3) - 3(y-4) - \left[x(y-2) - y(x+3)\right]$$
$$= -x + 3 - 3y + 12 - (xy - 2x - yx - 3y)$$
$$= -x - 3y + 15 - xy + 2x + xy + 3y = x + 15.$$
$$\mathrm{A} > \mathrm{B} \Leftrightarrow -2 > x + 15 \Leftrightarrow -x > 17 \Leftrightarrow x < -17.$$

2. (α) $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΒΓ και ε).
Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. Όμως, από την παραλληλία των ευθειών ε και ΒΓ προκύπτει ότι $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 40^\circ$ προκύπτει ότι
$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$
Άρα έχουμε
$$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma} = 70^\circ,$$
οπότε θα είναι
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = 180^\circ - 2\cdot 70^\circ = 40^\circ$$
$$\Rightarrow \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}x = 40^\circ.$$
(β) Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ, το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΚΓ, οπότε η ΚΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΚΓ. Άρα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}.$$
Επειδή είναι $\varepsilon \parallel \mathrm{B}\Gamma$ θα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z},$$
οπότε θα είναι και
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K},$$
οπότε το τρίγωνο ΚΑΖ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΑΖ .

3. (α) Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών έπεται ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των ψηφίων των μονάδων τους. Θεωρώντας τα τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι αυτά λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9, οπότε το τελευταίο ψηφίο κάθε τετραγώνου φυσικού αριθμού ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα πρέπει $b \in \{0,1,4,5,6,9\}$ και αφού ο αριθμός είναι περιττός πρέπει $b \in \{1,5,9\}$.

Επειδή ο Α διαιρείται με το 9 πρέπει να ισχύει ότι:
$$3a + 2b = \text{πολλαπλάσιο του } 9. \qquad (1)$$

- Για $b=1$ λαμβάνουμε $3a+2=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=5$ λαμβάνουμε $3a+10=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=9$ λαμβάνουμε $3a+18=\pi o\lambda.9$, οπότε προκύπτει ότι $a\in\{3,6,9\}$. Άρα είναι $\mathrm{A}=33399$ ή $\mathrm{A}=66699$ ή $\mathrm{A}=99999$.

4. **(α)** Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R=\mathrm{B}\Gamma=\alpha$. Επιπλέον $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$.

Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\cdot 75^\circ=150^\circ$, οπότε θα έχουμε

$$E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{OAE}\Gamma\right)=\pi\alpha^2\cdot\frac{150^\circ}{360^\circ}=\frac{5\pi\alpha^2}{12}.$$

(β) Επειδή είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}=75^\circ$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΓ) και $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=90^\circ-\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=90^\circ-\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=75^\circ$, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(γ) Επειδή είναι $\mathrm{OA}\perp\mathrm{A}\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta\parallel\mathrm{B}\Gamma$ θα είναι και $\mathrm{OA}\perp\mathrm{B}\Gamma$, οπότε η ΟΑ περνάει από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το τρίγωνο ΟΜΓ έχουμε

$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{O}\Gamma^2-\mathrm{M}\Gamma^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\frac{3\alpha^2}{4}\Leftrightarrow\mathrm{OM}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι $\mathrm{AM}=\mathrm{AO}+\mathrm{OM}=\alpha\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$\left(\mathrm{AB}\Gamma\right)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\left(\alpha+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\alpha^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

.