Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισοδύναμα από την δεδομένη ισότητα, έχουμε:

$$\underbrace{x^6-2x^3+1}+\underbrace{x^4-2x^2y^2+y^4}+\underbrace{y^4-2y^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2+\left(y^2-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1=0 \text{ και } x^2-y^2=0 \text{ και } y^2-1=0\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(x=1 \text{ και } y=1\right) \text{ ή } \left(x=1 \text{ και } y=-1\right)$$

2. Για να έχει η εξίσωση διπλή λύση, πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μηδέν.

$$\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\kappa\mu=0 \Leftrightarrow \lambda^2=4\kappa\mu .$$

Στη περίπτωση αυτή η διπλή λύση είναι: $x_1=x_2=\dfrac{-\lambda}{2\kappa}$

Ο αριθμός $4\kappa\mu$ είναι άρτιος. Άρα και ο λ^2 είναι άρτιος, οπότε ο λ είναι άρτιος.
Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο λ (δεδομένου ότι είναι μονοψήφιος θετικός ακέραιος) είναι: $\lambda=2$ ή $\lambda=4$ ή $\lambda=6$ ή $\lambda=8$.

Αν $\lambda=2$ τότε: $4=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=1$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$\kappa=1$ και $\mu=1$.

Αν $\lambda=4$ τότε: $16=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=4$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

($\kappa=1$ και $\mu=4$) ή ($\kappa=4$ και $\mu=1$) ή ($\kappa=2$ και $\mu=2$).

Αν $\lambda=6$ τότε: $36=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=9$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

($\kappa=1$ και $\mu=9$) ή ($\kappa=9$ και $\mu=1$) ή ($\kappa=3$ και $\mu=3$).

Αν $\lambda=8$ τότε: $64=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=16$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

($\kappa=2$ και $\mu=8$) ή ($\kappa=8$ και $\mu=2$) ή ($\kappa=4$ και $\mu=4$).

Άρα οι δυνατές τιμές για τη διατεταγμένη τριάδα (κ,λ,μ) είναι:

$(1,2,1)$, $(1,4,4)$, $(2,4,2)$, $(1,6,9)$, $(3,6,3)$, $(2,8,8)$, $(4,8,4)$.

Οι άλλες περιπτώσεις απορρίπτονται, διότι δεν δίνουν ακέραια λύση.
Οι εξισώσεις που προκύπτουν, με την αντίστοιχη διπλή λύση είναι:

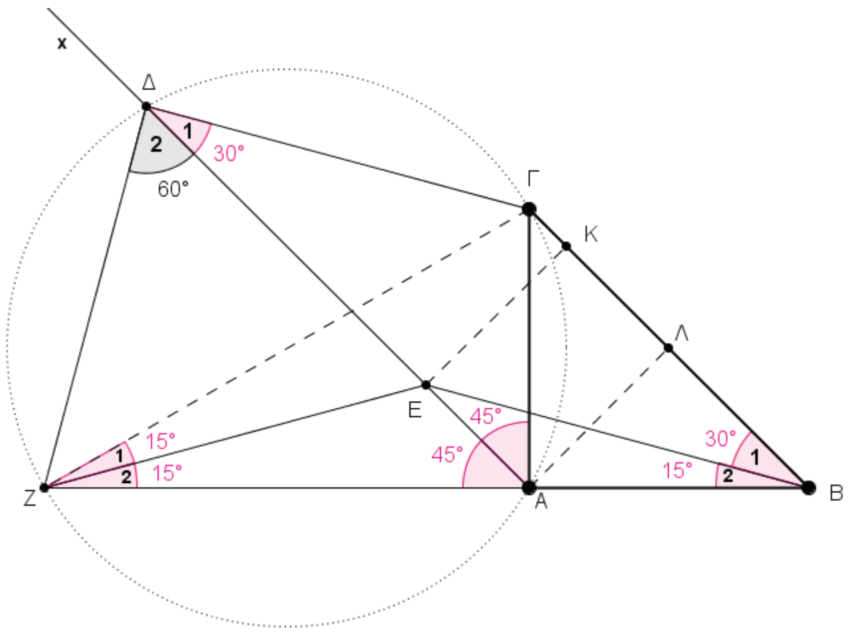
$$x^2+2x+1=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-1,$$

$$x^2+4x+4=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-2,$$

$$x^2+6x+9=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-3.$$

3. (α) Εφόσον το ΒΓΔΕ είναι ρόμβος, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\mathrm{B\Gamma}=\Gamma\Delta=\Delta\mathrm{E}=\mathrm{BE} \qquad (1)$$



Θεωρούμε $A\Lambda$ και EK κάθετες στη $B\Gamma$.
Τότε $A\Lambda = EK$ (διότι $A\Lambda KE$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).
Η $A\Lambda$ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, οπότε $A\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $A\Lambda = EK = \frac{B\Gamma}{2} \overset{(1)}{=} \frac{BE}{2}$. Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο BEK, έχουμε:

$$EK = \frac{BE}{2} \text{ οπότε } \hat{B}_1 = 30^o.$$

Από το ρόμβο $B\Gamma\Delta E$ έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = 30^o$ και επειδή $\Gamma\hat{\Delta}Z = 90^o$ έχουμε τελικά ότι:

$$\boxed{\hat{\Delta}_2 = 60^o} \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο $A\Gamma\Delta Z$ είναι εγγράψιμο (διότι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$) και η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}Z$. Άρα το Δ είναι μέσο του τόξου ΓZ, οπότε

$$\boxed{\Delta\Gamma = \Delta Z \overset{(1)}{=} \Delta E} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

(β) Προφανώς η AE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}Z$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ZE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{Z}A$.
Εφόσον το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο, θα ισχύει $EZ = EB$ και επειδή $\hat{B}_2 = 15^o$, θα ισχύει:

$$\hat{Z}_2 = 15^o \qquad (4)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΓΔΖ έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \hat{\Delta}_1 = 30^o$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{Z}}_1 = 15^o$.

4. Για $xyz \neq 0$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\frac{3xy}{z}+\frac{2yz}{x}=70,\ \frac{7yz}{x}+\frac{4zx}{y}=256,\ \frac{5zx}{y}+\frac{6xy}{z}=52,$$

το οποίο, αν θέσουμε

$$\frac{xy}{z}=u,\ \frac{yz}{x}=v,\ \frac{zx}{y}=w$$

γίνεται

$$\left.\begin{cases} 3u+2v=70 & (1) \\ 7v+4w=256 & (2) \\ 5w+6u=52 & (3) \end{cases}\right\}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε

$$9(u+v+w)=378 \Leftrightarrow .$$

$$u+v+w=42\ . \qquad (4)$$

Λόγω της (4) η εξίσωση (2) γίνεται

$$7v+4(42-u-v)=256$$

$$\Leftrightarrow -4u+3v=88. \qquad (5)$$

Από τις (1) και (5) λαμβάνουμε $u=2,\ v=32$, οπότε από την (4) προκύπτει ότι $w=8$. Άρα έχουμε το σύστημα

$$\frac{xy}{z}=2,\ \frac{yz}{x}=32,\ \frac{zx}{y}=8 \qquad (6)$$

από το οποίο με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων έχουμε

$$xyz=2\cdot 8\cdot 32\ . \qquad (7)$$

Από τις (6) και (7) λαμβάνουμε

$$\begin{Bmatrix} 32x^2=2\cdot 8\cdot 32 \\ 8y^2=2\cdot 8\cdot 32 \\ 2z^2=2\cdot 8\cdot 32 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2=16 \\ y^2=64 \\ z^2=256 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\pm 4 \\ y=\pm 8 \\ z=\pm 16 \end{Bmatrix},$$

οπότε προκύπτουν συνολικά 8 τριάδες που είναι λύσεις του συστήματος:

$$(x,y,z)=(4,8,16) \text{ ή } (-4,-8,-16) \text{ ή } (4,8,-16) \text{ ή } (-4,-8,16)$$

$$\text{ή } (4,-8,-16) \text{ ή } (-4,8,16) \text{ ή } (4,-8,16) \text{ ή } (-4,8,-16).$$