

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Λύση

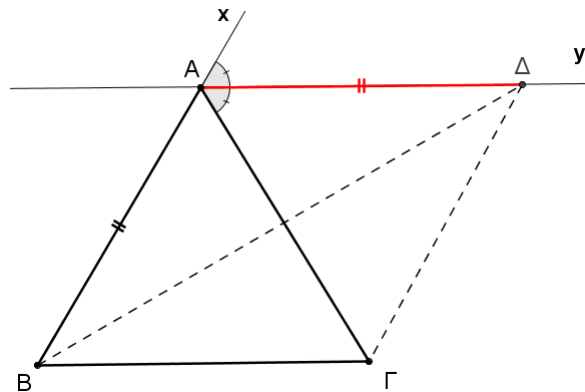
$$\begin{aligned} A &= 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 = (4 \cdot 25)^2 + 502 + (27 - 25) \cdot 249 - 10^4 \\ &= 100^2 + 502 + 2 \cdot 249 - 10000 = 10000 + 502 + 498 - 10000 = 1000 \end{aligned}$$

2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Ay είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και διχοτόμος της γωνίας $\hat{G}\hat{A}x$.

Δίνεται ακόμη ότι

$$\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 62^\circ \text{ και } AB = A\Delta.$$

- (α) Να βρείτε τις γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (β) Να εξηγήσετε γιατί η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή η Ay είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{G}\hat{A}x$ θα είναι $\hat{G}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{A}x$. Όμως είναι $\hat{G}\hat{A}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{A}x = 180^\circ - \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$, οπότε καθεμία από τις γωνίες $\hat{G}\hat{A}\hat{\Delta}$ και $\hat{\Delta}\hat{A}x$ είναι 59° .

Επειδή είναι $Ay \parallel B\Gamma$ έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{A}x = 59^\circ \text{ και } \hat{\Gamma} = \hat{G}\hat{A}\hat{\Delta} = 59^\circ.$$

(β) Επειδή είναι $AB = A\Delta$, έπεται ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}. \quad (1)$$

Λόγω της παραλληλίας των ευθειών $B\Gamma$ και Ay έχουμε ότι

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma},$$

οπότε η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$.

3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \alpha + 5(4 + \alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 .$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{42}{10} < \frac{42}{\alpha} < \frac{42}{8} \Leftrightarrow 8 < \alpha < 10,$$

οπότε θα είναι $\alpha = 9$, αφού α θετικός ακέραιος. Άρα είναι:

$$A = 9 + 5(4 + 9) + 3(9 - 4) + 1919 = 9 + 5 \cdot 13 + 3 \cdot 5 + 1919 = 2008 .$$

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Λύση

Αν είναι A_1 ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στην παρέλαση, τότε ο A_1 είναι πολλαπλάσιο του 3 και επιπλέον έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \text{πολ.}5 + 3 \\ A_1 = \text{πολ.}7 + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 - 3 = \text{πολ.}5 \\ A_1 - 3 = \text{πολ.}7 \end{array} \right\},$$

οπότε ο αριθμός $A_1 - 3$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7. Τότε ο αριθμός $A_1 - 3$ θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, δηλαδή θα είναι ένας από του αριθμούς

$$35, 70, 105, 140, \dots,$$

Επομένως ο αριθμός A_1 θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

$$38, 73, 108, 143, \dots$$

Αν A είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση είναι

$$100 < A < 200 \Rightarrow \frac{60}{100} \cdot 100 < \frac{60}{100} \cdot A < \frac{60}{100} \cdot 200 \Rightarrow 60 < A_1 < 120,$$

οπότε οι αποδεκτές τιμές για τον αριθμό A_1 είναι οι 73 και 108. Επειδή ο αριθμός A_1 είναι και πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι $A_1 = 108$, οπότε ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου είναι:

$$A = 108 \cdot \frac{100}{60} = 180.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα κορίτσια που συμμετείχαν στην παρέλαση ήταν $2 \cdot 108 = 216$, οπότε ο αριθμός K των κοριτσιών του Γυμνασίου είναι:

$$K = 216 \cdot \frac{100}{80} = 270.$$

Άρα συνολικά το Γυμνάσιο έχει $180 + 270 = 450$ μαθητές και μαθήτριες.