Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι $x$ ώρες, τότε η βρύση Β θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{4}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Γ η οποία θα λειτουργήσει $x-2$ ώρες και θα αδειάσει τα $\frac{x-2}{6}$ της δεξαμενής. Τέλος θα ανοίξει η βρύση Α η οποία θα λειτουργήσει $x-3$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-3}{3}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(4)**.

Στη περίπτωση **(6)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Γ), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Α (διότι ο μηχανισμός χρονομέτρησης αρχίζει μόλις πέσει νερό στη δεξαμενή).

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι $x$ ώρες, τότε η βρύση Α θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{3}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Β η οποία θα λειτουργήσει $x-1$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-1}{4}$ της δεξαμενής.

Τέλος η βρύση Γ θα λειτουργήσει $x$ ώρες, και θα αδειάσει τα $\frac{x}{6}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(6)**.

Ανάλογα εξηγούνται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΘΕΜΑ 1$^{ο}$ (**

Αν $\alpha,\beta$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\le\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

**Λύση**

Έχουμε

$$\sqrt{\alpha\beta}\le\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (1)$$

που ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με την αληθή ανισότητα $0\le\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$.

Επιπλέον έχουμε

$$\frac{4}{\alpha+\beta}\le\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, \qquad (2)$$

η οποία ισχύει γιατί γράφεται ως

$$\frac{4}{\alpha+\beta}\le\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\Leftrightarrow\frac{4}{\alpha+\beta}\le\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\Leftrightarrow 4\alpha\beta\le\left(\alpha+\beta\right)^2\Leftrightarrow 0\le\left(\alpha-\beta\right)^2.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των δύο ανισοτήτων (1) και (2) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

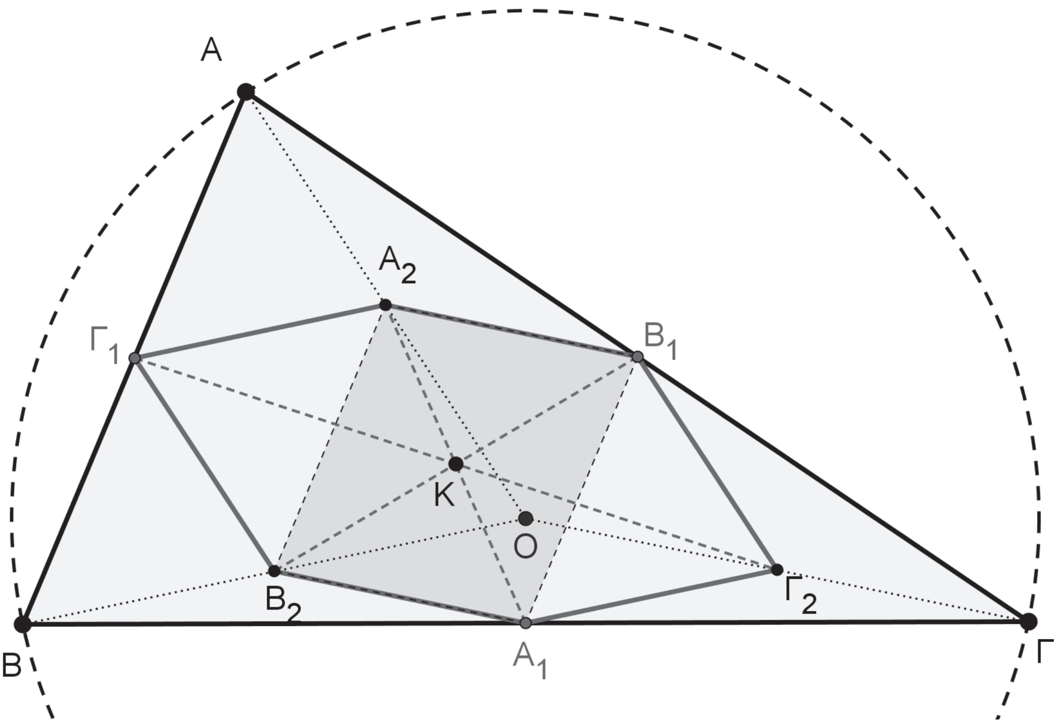
$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\le\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

**ΘΕΜΑ 2ο .**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ είναι τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma}, \mathrm{A\Gamma}, \mathrm{AB}$ αντίστοιχα και $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ είναι τα μέσα των $\mathrm{OA}, \mathrm{OB}, \mathrm{O\Gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\Gamma_2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2\Gamma_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ και $\Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

**Λύση**

Εφόσον Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, θα ισχύει: $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{R}$.




Σχήμα 6

Το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1$ συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΟΑΓ, άρα:

$$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1 = \frac{\mathrm{O\Gamma}}{2} = \frac{R}{2} \qquad (1).$$

Το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2$ συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΟΒΓ, άρα:

$$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 = \frac{\mathrm{O\Gamma}}{2} = \frac{R}{2} \qquad (2).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι όλες οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες με $\frac{R}{2}$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται στο σημείο $K$.

Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $A_1\Gamma_2A_2\Gamma_1$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και σε αυτή τη περίπτωση οι διαγώνιες θα διχοτομούνται στο σημείο $K$.

**ΘΕΜΑ 3ο .**

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $x, y$ με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\frac{x-y+2}{2}.$$

**Λύση**

Οι άρρητες παραστάσεις ορίζονται γιατί δίνεται ότι: $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$.

Αν θέσουμε $\sqrt{x-2009}=a$ και $\sqrt{y+2009}=b$, τότε λαμβάνουμε $x=a^2+2009$ και $y=b^2-2009$, από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση $x+y=a^2+b^2$.

Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a+b=\frac{a^2+b^2}{2}+1 \Leftrightarrow a^2+b^2-2a-2b+2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow a-1=b-1=0 \Leftrightarrow a=b=1,$$

οπότε θα είναι $x=2010, y=-2008$ και $A=2010$.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l}(x+y)^3=z-2x-y\\(y+z)^3=x-2y-z\\(z+x)^3=y-2z-x\end{array}\right\} \qquad (\Sigma)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

**Λύση**

Θέτουμε $x+y=\alpha$, $y+z=\beta$ και $z+x=\gamma$, οπότε το δοσμένο σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha^3+2\alpha=\beta\\\beta^3+2\beta=\gamma\\\gamma^3+2\gamma=\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha(\alpha^2+2)=\beta\\\beta(\beta^2+2)=\gamma\\\gamma(\gamma^2+2)=\alpha\end{array}\right.$$

Από τη τελευταία έκφραση του συστήματος συμπεραίνουμε ότι έχει τη προφανή λύση:

$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση.

Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ τότε πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις έχουμε:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=1.$$

Η τελευταία ισότητα δεν είναι δυνατό να ισχύει , οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha=0$ τότε θα ισχύει: $\beta=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\beta=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\gamma=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\beta=0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Άρα το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\left. \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$