**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**
**71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
**"Ο ΘΑΛΗΣ"**
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010**

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

## Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**1.** Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.

**(α)** Να βρεθούν οι αριθμοί $x$ και $y$.

**(β)** Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο $A$, του οποίου οι αριθμοί $x$ και $y$ είναι πολλαπλάσια.

**Λύση**

**(α)** Έχουμε

$$x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4\cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2 = 4\cdot 25 - 64 + 7\cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

**(β)** Για την εύρεση του $A$ αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών $x$, $y$. Επειδή είναι $\text{ΜΚΔ}(33,99) = 33$, έπεται ότι θα είναι $A = 33$.

**2.** Έστω $\alpha, \beta$ φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον $\alpha$ και διαιρέτη τον $\beta$ δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\alpha$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο $\alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός $\beta$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

**Λύση**

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακέραιων με τον μικρότερό τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

$$\begin{array}{ccc} 16 & 32 & 248 \\ 16 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{array},$$

οπότε είναι $\beta = \text{ΜΚΔ}(16, 32, 248) = 8$.

Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha = 8\cdot 6 + \upsilon = 48 + \upsilon$, όπου $\upsilon$ ακέραιος με δυνατές τιμές από 0 μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του $\upsilon$ στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για $\upsilon = 1$, ο αριθμός $\alpha = 49$ που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άρα έχουμε $\alpha = 49$ και $\beta = 8$.

**3.** Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $Ι\hat{Δ}Γ = 70^0$ και $Ι\hat{Ε}Γ = 130^0$, να βρεθούν:

**α)** η γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

**β)** οι γωνίες $Β\hat{Ι}Δ$ και $Ε\hat{Ι}Γ$.

**Λύση**

**α.** Εφόσον $ΙΔ//ΑΒ$ θα ισχύει: $\hat{Β} = \hat{Δ}_1 = 70^o$,(ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων $ΙΔ, ΑΒ$ τεμνομένων από την $ΒΔ$).

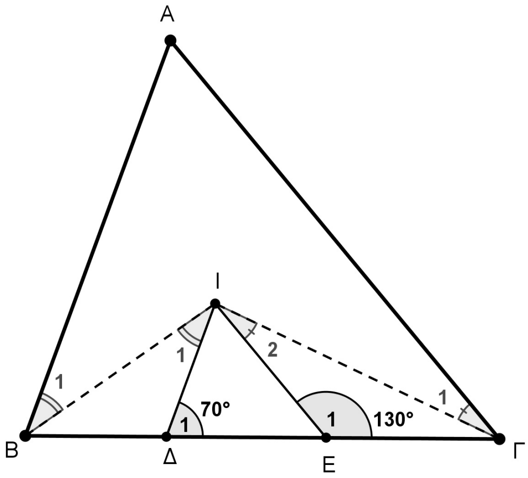
Επειδή είναι $ΙΕ//ΑΓ$, θα ισχύει: $\hat{Γ} = \hat{Ε}_1 = 180^o - 130^o = 50^o$. (Οι γωνίες $\hat{Γ}, \hat{Ε}_1$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΙΕ, ΑΓ$ τεμνομένων από την $ΕΓ$).

Οι γωνίες $\hat{Α}, \hat{Β}, \hat{Γ}$ είναι γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$, οπότε θα ισχύει:

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Α} = 180^o - \hat{Β} - \hat{Γ} = 180^o - 70^o - 50^o = 60^o.$$

**β.** Επειδή η $ΙΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, θα ισχύει: $\hat{Β}_1 = \frac{\hat{Β}}{2} = \frac{70^o}{2} = 35^o$.

Επίσης, επειδή $ΙΔ//ΑΒ$, θα ισχύει: $\hat{Ι}_1 = \hat{Β}_1 = 35^o$, γιατί οι γωνίες $\hat{Ι}_1, \hat{Β}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $ΙΔ, ΑΒ$ που τέμνονται από την $ΙΒ$.




Σχήμα 1

Εφόσον $ΙΓ$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$, θα ισχύει: $\hat{Γ}_1 = \frac{\hat{Γ}}{2} = \frac{50^o}{2} = 25^o$.

Επίσης είναι $ΙΕ//ΑΓ$, οπότε θα ισχύει: $\hat{Ι}_2 = \hat{Γ}_1 = 25^o$, αφού οι γωνίες $\hat{Ι}_2, \hat{Γ}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $ΙΕ, ΑΓ$ που τέμνονται από την $ΙΓ$.

**4.** Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

**α.** Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

**β.** Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

**Λύση**

**α.** Επειδή θεωρούμε ότι τα 120+80=200 ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων είναι της ιδίας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδενδρο είναι 2600:200=13 κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120 \cdot 13 = 1560$ κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560 \cdot \frac{10}{100} = 156$ κιλά λάδι.

**β.** Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδενδρα του κτήματος του αγρότη παράγουν $x$ κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $x \cdot \frac{150}{100} = \frac{3x}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80 \cdot x + 120 \cdot \frac{3x}{2} = 2600 \Leftrightarrow 80x + 180x = 2600 \Leftrightarrow 260x = 2600 \Leftrightarrow x = \frac{2600}{260} = 10.$$

Επομένως τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά $120 \cdot 15 = 1800$ κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει $1800 \cdot \frac{10}{100} = 180$ κιλά λάδι.