

### Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αν  $x + y = 3 \cdot (-2)^2$  και  $y - w = \left[ \left( -\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[ \left( -\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4}$ , να βρεθεί η τιμή της

παράστασης:  $A = 7x + 10y - 3w - 87$ .

#### Λύση

Έχουμε  $x + y = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = 12$  και

$$\begin{aligned} y - w &= \left[ \left( -\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[ \left( -\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4} = \left( -\frac{3}{5} \right)^{24} \cdot \left( -\frac{3}{5} \right)^{-24} = \left( -\frac{3}{5} \right)^{24} \cdot \left( -\frac{5}{3} \right)^{24} \\ &= \left[ \left( -\frac{3}{5} \right) \cdot \left( -\frac{5}{3} \right) \right]^{24} = 1^{24} = 1. \end{aligned}$$

Άρα είναι:

$$\begin{aligned} A &= 7x + 10y - 3w - 87 = 7x + 7y + 3y - 3w - 87 \\ &= 7(x + y) + 3(y - w) - 87 = 7 \cdot 12 + 3 \cdot 1 - 87 = 84 + 3 - 87 = 0. \end{aligned}$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

- (α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
- (β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
- (γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5,
- (δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

#### Λύση

Έστω  $\overline{xyzw} = 1000 \cdot x + 100 \cdot y + 10 \cdot z + w$  ο ζητούμενος τετραψήφιος φυσικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με το (α) θα είναι  $w = 0$  ή 4 ή 8, οπότε σύμφωνα με το (β) θα είναι  $z = 0$  ή 2 ή 4, αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με το (γ) θα είναι  $y = 1$  ή 5.

Έτσι οι δυνατές μορφές του αριθμού είναι:

$$\overline{x100}, \overline{x124}, \overline{x148}, \overline{x500}, \overline{x524}, \overline{x548}.$$

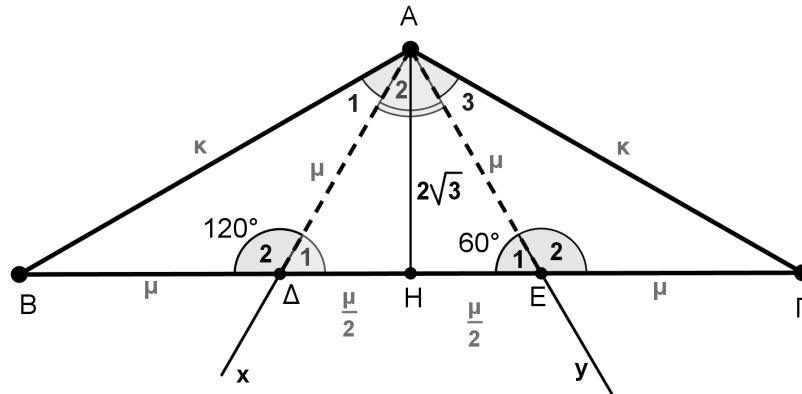
Λαμβάνοντας υπόψη και το (δ) καταλήγουμε στους αριθμούς 4500, 4524, 4548, αφού το πρώτο ψηφίο τετραψήφιου φυσικού αριθμού δεν μπορεί να είναι το 0.

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 120^\circ$ . Στο εσωτερικό της γωνίας  $A$  φέρουμε ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  κάθετες στις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$ , αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά  $B\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$ , αντίστοιχα. Αν  $\hat{A\Delta B} = 120^\circ$ ,  $\hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ$  και το ύψος  $AH$  έχει μήκος  $2\sqrt{3}$  μονάδες μήκους, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισόπλευρο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$ .

**Λύση**

**α.** Η γωνία  $\hat{\Delta}_1$  είναι παραπληρωματική της γωνίας  $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}\hat{\Delta}B = 120^\circ$ , οπότε θα είναι  $\hat{\Delta}_1 = 60^\circ$ . Από τα δεδομένα όμως έχουμε ότι  $\hat{E}_1 = 60^\circ$ . Άρα το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 2

**β.** Εφόσον οι ημιευθείες  $A\Delta$  ( $Ax$ ) και  $AE$  ( $Ay$ ) είναι κάθετες προς τις  $A\Gamma$  και  $AB$ , θα ισχύει:  $\hat{A}_1 = \hat{A}_3 = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} - 90^\circ = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ .

Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $AG\epsilon$  έχουν:  $A\Delta = AE$  (από το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Delta E$ ),  $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2 = 120^\circ$  και  $\hat{A}_1 = \hat{A}_3 = 30^\circ$ . Επομένως τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $AG\epsilon$  είναι ίσα και συνεπώς  $AB = AG$ .

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από τα ορθογώνια τρίγωνα  $A\epsilon B$  και  $A\Delta\Gamma$  που έχουν  $\hat{A}\hat{E}B = 60^\circ = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ , οπότε θα είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$ , δηλαδή  $AB\Gamma$  ισοσκελές.

**γ.** Έστω  $\mu$  το μήκος της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου  $A\Delta E$  και  $\kappa$  το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ . Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $AH\Delta$  έχουμε:

$$A\Delta^2 = AH^2 + \Delta H^2 \text{ δηλαδή } \mu^2 = \frac{\mu^2}{4} + (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \frac{3\mu^2}{4} = 12 \Leftrightarrow \mu = 4.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $AHB$  έχουμε:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2, \text{ δηλαδή } \kappa^2 = \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2 + (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 48 \Leftrightarrow \kappa = 4\sqrt{3}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $12 + 8\sqrt{3}$ .

Η περίμετρος του τριγώνου  $A\Delta E$  είναι 12, οπότε ο λόγος του θα είναι  $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ .

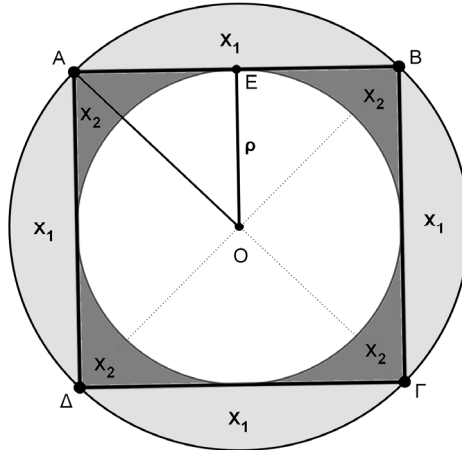
**4.** Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  έχει πλευρά  $2\rho$ . Ονομάζουμε  $X_1$  το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου  $C(O, \rho A)$  που ορίζονται από τις χορδές  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  και  $\Delta A$ . Επίσης ονομάζουμε  $X_2$  το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$  και εσωτερικά του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .

**α.** Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου  $\Delta(O, \rho, OA)$  που ορίζεται από τους κύκλους  $C(O, \rho)$  και  $C(O, \rho A)$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά  $E(X_1)$  και  $E(X_2)$  των χωρίων  $X_1$  και  $X_2$ ,

αντίστοιχα έχουν λόγο  $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$  μεγαλύτερο του  $\frac{13}{5}$ .

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα  $x$  του κύκλου  $C(O, x)$  που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο  $\Delta(O, \rho, OA)$  σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Σχήμα 3

### Λύση

(α) Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $OAE$  με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος λαμβάνουμε  $OA^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow OA^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow OA = \rho\sqrt{2}$ , οπότε είναι

$$E(\Delta(O, \rho, OA)) = \pi(\rho\sqrt{2})^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2.$$

(β) Το εμβαδόν του χωρίου  $X_1$  προκύπτει από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho\sqrt{2}$ , αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τετράγωνου  $AB\Gamma\Delta$ .

Άρα είναι

$$E(X_1) = \pi(\rho\sqrt{2})^2 - (2\rho)^2 = 2\pi\rho^2 - 4\rho^2 = (2\pi - 4)\rho^2.$$

Το εμβαδόν του χωρίου  $X_2$  προκύπτει από το εμβαδόν του τετράγωνου  $AB\Gamma\Delta$ , αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho$ , δηλαδή

$$E(X_2) = (2\rho)^2 - \pi\rho^2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2.$$

Άρα είναι  $\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi}$  και ισχύει ότι:

$$\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi} > \frac{13}{5} \Leftrightarrow 5(2\pi - 4) > 13(4 - \pi) \Leftrightarrow 23\pi > 72 \Leftrightarrow \pi > \frac{72}{23} \cong 3,1304,$$

το οποίο είναι αληθές, αφού είναι  $\pi \cong 3,14$ .

(γ) Θα πρέπει να είναι  $\rho < x < \rho\sqrt{2}$  και τα εμβαδά των δύο κυκλικών δακτύλιων που ορίζονται να είναι ίσα, δηλαδή

$$\pi\left[(\rho\sqrt{2})^2 - x^2\right] = \pi(x^2 - \rho^2) \Leftrightarrow 2\rho^2 - x^2 = x^2 - \rho^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 3\rho^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3\rho^2}{2} \Leftrightarrow x = \rho\sqrt{\frac{3}{2}}.$$