Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$
$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$
$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες προκύπτει ότι πρέπει να αληθεύουν οι περιορισμοί: $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$, αλλά και οι περιορισμοί $x^2 \geq y + z,\ y^2 \geq z + x$ και $z^2 \geq x + y$. Στη συνέχεια με ύψωση στο τετράγωνο των δύο μελών των δεδομένων εξισώσεων λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - y - z = x^2 - 4x + 4 \\ y^2 - z - x = y^2 - 4y + 4 \\ z^2 - x - y = z^2 - 4z + 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x - y - z = 4 \\ -x + 4y - z = 4 \\ -x - y + 4z = 4 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε: $x + y + z = 6$.

Οι αριθμοί x, y, z προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος (1), αν τις γράψουμε στη μορφή

$$\left\{\begin{array}{l} 5x - (x + y + z) = 4 \\ 5y - (x + y + z) = 4 \\ 5z - (x + y + z) = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x - 6 = 4 \\ 5y - 6 = 4 \\ 5z - 6 = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{array}\right\}.$$

Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις ανισότητες $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$ αληθεύει μόνον ως γνήσια ανισότητα, έστω $x > 2$, τότε με πρόσθεση αυτών κατά μέλη προκύπτει ότι $x + y + z > 6$, που είναι άτοπο. Άρα θα είναι $x = y = z = 2$.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και οι κύκλοι $c_1(Α, ΑΒ)$ (με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $R_1 = ΑΒ$) και $c_2(Α, ΑΓ)$ (με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $R_2 = ΑΓ$). Ο κύκλος $c_1(Α, ΑΒ)$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο σημείο $Ε$ και την ευθεία $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο κύκλος $c_2(Α, ΑΓ)$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο σημείο $Κ$ και την ευθεία $ΑΓ$ στο σημείο $Ν$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΓΑ = ΓΒ$ και $\hat{Γ} = 30^o$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι τετράγωνο.

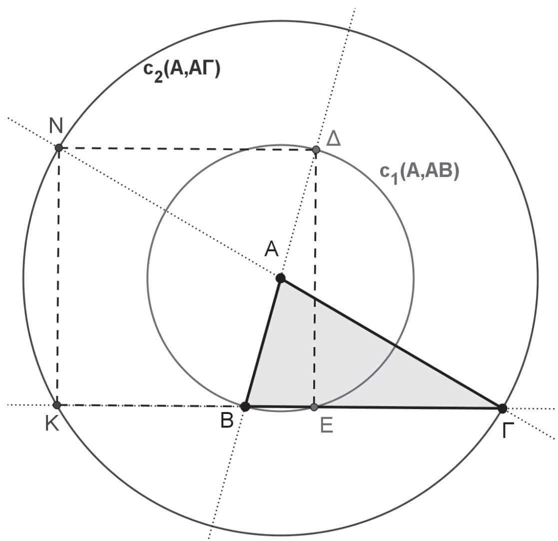
Λύση

α. Η $ΒΔ$ (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_1(Α, ΑΒ)$, οπότε $Α$ είναι το μέσο του $ΒΔ$ και $Β\hat{Ε}Δ = 90^o$.
Η $ΓΝ$ (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_2(Α, ΑΓ)$, οπότε $Α$ είναι το μέσο του $ΓΝ$ και $Γ\hat{Κ}Ν = 90^o$.

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $ΝΔΓΒ$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιες του διχοτομούνται, οπότε $ΝΔ = //ΒΓ$.

Από την ισότητα $Β\hat{Ε}Δ = Γ\hat{Κ}Ν = 90^o$ προκύπτει ότι οι ευθείες $ΝΚ$ και $ΔΕ$ είναι κάθετες προς την ευθεία ΒΓ, οπότε θα είναι $ΝΚ // ΔΕ$.

Από τις προηγούμενες παραλληλίες συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι παραλληλόγραμμο και από την ισότητα $Β\hat{Ε}Δ = Γ\hat{Κ}Ν = 90^o$ καταλήγουμε στο ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι ορθογώνιο.



Σχήμα 5

.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΝΚΓ$ ισχύει $\hat{Γ} = 30^o$, οπότε η κάθετη πλευρά απέναντι από τη γωνία Γ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Άρα θα έχουμε

$$ΚΝ = \frac{ΝΓ}{2} = ΑΓ = ΒΓ,$$

οπότε, λόγω της ισότητας ΝΔ = ΒΓ, συμπεραίνουμε ότι ΚΝ = ΝΔ, δηλαδή δύο διαδοχικές πλευρές του ορθογώνιου ΔΕΚΝ είναι ίσες, οπότε αυτό είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{4x^2+4x+1}{x}+\frac{4y^2+4y+1}{y}\geq 25$$

ή αρκεί: $4(x+y)+8+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 25$

ή αρκεί: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1$.

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να προκύψει με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι μέσω της σχέσης

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4,$$

αν θέσουμε $x+y=4$, η οποία αληθεύει γιατί

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 2+2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=4.$$

Η ισότητα ισχύει για $x=y=2$.

Διαφορετικά, αρκεί να γράψουμε

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\geq 1\Leftrightarrow xy\leq 4\Leftrightarrow x(4-x)\leq 4\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0$$

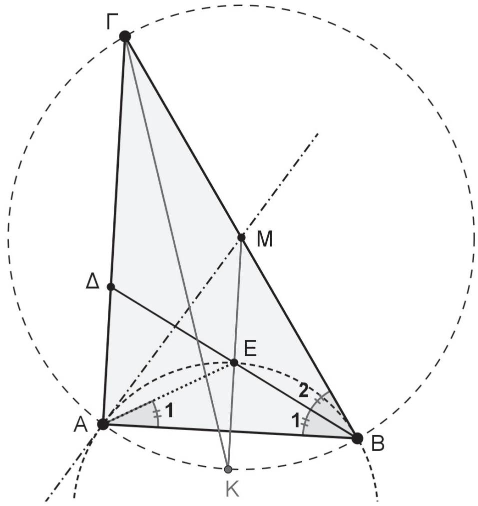
$$\Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0,\text{ που ισχύει.}$$

Στην τελευταία σχέση η ισότητα ισχύει για $x=y=2$, οπότε και η ζητούμενη σχέση αληθεύει ως ισότητα για $x=y=2$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) και έστω Ε το μέσο της διχοτόμου ΒΔ. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΕΒ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΕ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Επειδή Ε είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ, θα ισχύει:



Σχήμα 6

$EA = EB$. Άρα το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$.

Επειδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, θα ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$, καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Άρα η ΓB είναι εφαπτόμενη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AEB και κατά συνέπεια $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε ως εξής:

Οι γωνίες $M\hat{A}E$ και $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι και οι δύο οξείες και η $M\hat{A}E$ είναι γωνία χορδής – εφαπτομένης, ενώ η $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AE του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB. Επομένως θα είναι $M\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2}$, οπότε $M\hat{A}B = \hat{B}$ και το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Το σημείο M είναι το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$, οπότε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τελικά η ME είναι η μεσοκάθετη της πλευράς AB, οπότε θα διέρχεται από το μέσο K του τόξου AB, από το οποίο διέρχεται και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.