

## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Αν  $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$ ,  $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$  και  $10^{-1} \cdot 1000$  να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

### Λύση

Έχουμε:

$$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2, \beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2 \text{ και } \gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2.$$

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left( \frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left( \frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2} \\ &= (2 \cdot 10^{6-4})^{-2} = (2 \cdot 10^2)^{-2} = \frac{1}{(2 \cdot 10^2)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^2} = \frac{1}{4 \cdot 100} = \frac{1}{400} \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

### Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \leq 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \leq 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

$$\frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2}-6}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow \frac{x-6}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \leq x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \leq 8 \cdot x \Leftrightarrow x-6 - (2x-9) \leq 8x$$

$$\Leftrightarrow x-6-2x+9 \leq 8x \Leftrightarrow 3 \leq 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν  $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$ , οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1, 2 και 3.

### Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  δίνεται ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση  $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$ , όπου  $\lambda, \mu$  πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία  $(\delta)$  με εξίσωση  $y = 2\lambda x$  και περνάει από το σημείο  $K(2, 8)$ .

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\lambda$  και  $\mu$ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία  $\Lambda(-4, -4)$  και  $M(-1, 2)$  ανήκουν στην ευθεία  $(\varepsilon)$  και να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $ΚΛ$ .

### Λύση

(α) Επειδή είναι  $(\varepsilon) \parallel (\delta)$ , οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση  $3\lambda - 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$ . Έτσι η εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  γίνεται  $y = 2x + 2\mu$ . Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο  $K(2, 8)$  ανήκει στην ευθεία  $(\varepsilon)$ , οπότε θα ισχύει:  $8 = 2 \cdot 2 + 2\mu \Leftrightarrow 2\mu = 4 \Leftrightarrow \mu = 2$ . Άρα έχουμε:

$$\lambda = 1, \mu = 2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon): y = 2x + 4.$$

(β) Επειδή ισχύουν  $2 \cdot (-4) + 4 = -4$  και  $2 \cdot (-1) + 4 = 2$ , τα σημεία  $\Lambda(-4, -4)$  και  $M(-1, 2)$  επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$ , οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας  $(\varepsilon)$ . Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου  $M$  από τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

$$MK = \sqrt{(2+1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$M\Lambda = \sqrt{(-4+1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο  $M$  είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $ΚΛ$ .

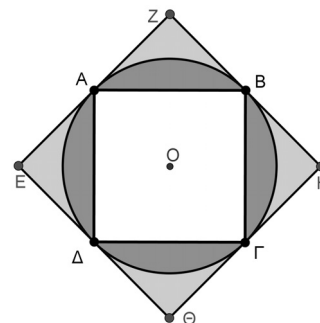
### Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα  $ΑΒΓΔ$  και  $ΕΖΗΘ$  είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο  $ΕΖΗΘ$  έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου  $C(O, \rho)$  στα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$ .

(α) Να βρείτε το άθροισμα  $\Sigma_1$  των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$  και εξωτερικά του τετραγώνου  $ΑΒΓΔ$ .

(β) Να βρείτε το άθροισμα  $\Sigma_2$  των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου  $ΕΖΗΘ$  και εξωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι  $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$ . (Θεωρείστε ότι  $\pi = 3,1415$ ).



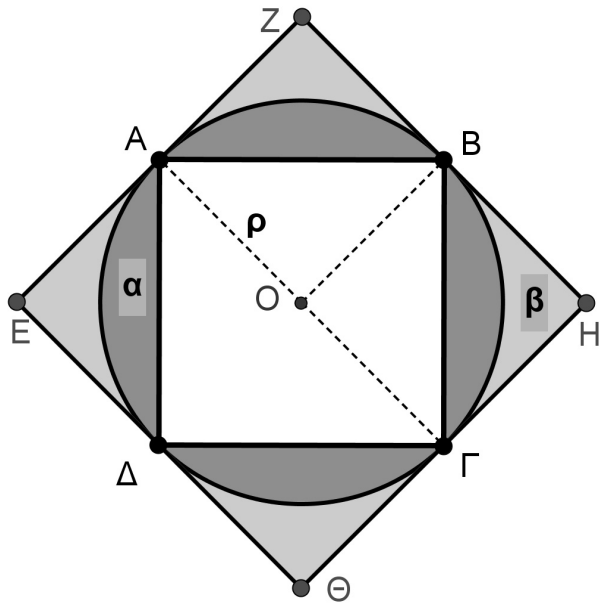
### Λύση

1. Επειδή είναι  $OA = OB$ ,  $OA \perp EZ$  και  $OB \perp ZH$ , έπεται ότι το τετράπλευρο  $ΟΑΖΒ$  είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο  $ΑΟΒ$  είναι ορθογώνιο στο  $Ο$ . Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο  $ΟΑΒ$  λαμβάνουμε:

$$AB^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow AB^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow AB = \rho\sqrt{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι:  $2\rho^2$ . Το εμβαδόν του κύκλου είναι  $\pi\rho^2$ , οπότε το άθροισμα  $\Sigma_1$ , θα είναι:

$$\Sigma_1 = \pi\rho^2 - 2\rho^2 = (\pi - 2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι  $OA \perp EZ$  και  $OG \perp H\Theta$ , έπεται ότι η  $AG$  είναι διάμετρος του κύκλου  $C(O, \rho)$ . Άρα το τετράπλευρο  $AGHZ$  είναι ορθογώνιο, οπότε  $ZH = 2\rho$ . Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  είναι ίσο με  $4\rho^2$ . Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi - 2)\rho^2}{(4 - \pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi - 2) < 4(4 - \pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3,1428\dots, \text{ που ισχύει.}$$