



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right).$$

Λύση

$$A = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5} \cdot \left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right) = \frac{88}{5} \cdot \frac{5}{44} - \frac{39}{5} \cdot \frac{5}{39} = 2 - 1 = 1.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$B = \frac{2 - \frac{\kappa}{2}}{\kappa - \frac{1}{2}} : \frac{3 - \kappa}{\kappa}.$$

Λύση

Είναι $\text{ΜΚΔ}(12, 30, 54) = 6$. Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε $\kappa = 2$ ή $\kappa = 3$.

$$\text{Για } \kappa = 2 \text{ έχουμε: } B = \frac{2 - \frac{2}{2}}{2 - \frac{1}{2}} : \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3}.$$

Για $\kappa = 3$ ο διαιρέτης $\frac{3-\kappa}{2}$ της παράστασης B γίνεται $\frac{3-3}{2} = 0$, ενώ ο διαιρέτης $\frac{3-\kappa}{\kappa}$ της παράστασης B γίνεται $\frac{3-3}{3} = 0$, ενώ ο διαιρέτης $\frac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}}$ γίνεται $\frac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5} \neq 0$, οπότε η παράσταση B δεν ορίζεται.

Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

- (α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.
- (β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Λύση

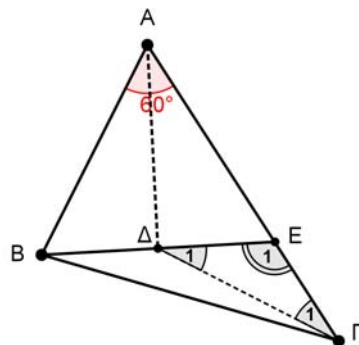
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι $2,5 \cdot \frac{6}{100} = 0,15$ ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι $2,5 - 0,15 = 2,35$ ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι $1050 + 407 = 1457$ ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει $1457 : 2,35 = 620$ κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει $800 \cdot \frac{8}{100} = 64$ κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό $800 - (620 + 64) = 116$ κιλά λάδι.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $AG = \frac{3}{2} \cdot AB$. Παίρνουμε σημείο E πάνω στην πλευρά AG τέτοιο ώστε $AE = AB$. Αν η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα BE στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με α το μήκος του τμήματος AB , δηλαδή: $AB = \alpha$.

Εφόσον $AG = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}\alpha$ και $AE = AB = \alpha$, έχουμε:

$$EG = AG - AE = \frac{3}{2}\alpha - \alpha = \frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($AB = AE$) και η γωνία του \hat{A} είναι 60° , οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του AD είναι και διάμεσος.

Άρα είναι $DE = \frac{\alpha}{2}$ και το τρίγωνο DEG είναι ισοσκελές, αφού $EG = EG = \frac{\alpha}{2}$.

Η γωνία \hat{E}_1 είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου ABE . Άρα έχουμε

$$\hat{E}_1 = 180^\circ - \hat{AEB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

οπότε: $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έχουμε:

$$x = 2^{-10}, y = 4^{-8} = (2^2)^{-8} = 2^{-16}, z = 8^{-6} = (2^3)^{-6} = 2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182} = (2^{-10})^2 \cdot (2^{-16})^4 \cdot (2^{-18})^6 \cdot 2^{182} \\ &= 2^{-20} \cdot 2^{-64} \cdot 2^{-108} \cdot 2^{182} = 2^{-10}. \end{aligned}$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned} B &= 3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1} = 3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^4 \cdot 3^6)^{-1} = 3 \cdot [2^2 \cdot 3^3 (13 + 2^2 \cdot 3^3)]^{-1} \\ &= 3 \cdot (2^2 \cdot 3^3 \cdot 121)^{-1} = 3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 121^{-1} = 2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 11^{-2}. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$K = \frac{2^{-10}}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 121^{-1}} = \frac{3^2 \cdot 121}{2^8} = \frac{3^2 \cdot 11^2}{2^8} = \left(\frac{33}{2^4}\right)^2 = \left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha(x - 3) + 2(\alpha - 1).$$

Λύση

Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι