Για συντομία, θα συμβολίσουμε με α το μήκος του τμήματος AB, δηλαδή: $AB = \alpha$.

Εφόσον $A\Gamma = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}\alpha$ και $AE = AB = \alpha$, έχουμε:

$$E\Gamma = A\Gamma - AE = \frac{3}{2}\alpha - \alpha = \frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($AB = AE$) και η γωνία του $\hat{A}$ είναι 60^o, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του $A\Delta$ είναι και διάμεσος.

Άρα είναι $\Delta E = \frac{\alpha}{2}$ και το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές, αφού $E\Gamma = E\Gamma = \frac{\alpha}{2}$.

Η γωνία $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου ABE. Άρα έχουμε

$$\hat{E}_1 = 180^\circ - A\hat{E}B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

οπότε : $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^o$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot \left(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3\right)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έχουμε:

$$x = 2^{-10}, y = 4^{-8} = \left(2^2\right)^{-8} = 2^{-16}, z = 8^{-6} = \left(2^3\right)^{-6} = 2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$A = x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182} = \left(2^{-10}\right)^2 \cdot \left(2^{-16}\right)^4 \cdot \left(2^{-18}\right)^6 \cdot 2^{182}$$
$$= 2^{-20} \cdot 2^{-64} \cdot 2^{-108} \cdot 2^{182} = 2^{-10}.$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\Pi = 3 \cdot \left(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3\right)^{-1} = 3 \cdot \left(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^4 \cdot 3^6\right)^{-1} = 3 \cdot \left[2^2 \cdot 3^3\left(13 + 2^2 \cdot 3^3\right)\right]^{-1}$$
$$= 3 \cdot \left(2^2 \cdot 3^3 \cdot 121\right)^{-1} = 3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 121^{-1} = 2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 11^{-2}.$$

Άρα έχουμε

$$K = \frac{2^{-10}}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 121^{-1}} = \frac{3^2 \cdot 121}{2^8} = \frac{3^2 \cdot 11^2}{2^8} = \left(\frac{33}{2^4}\right)^2 = \left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha\left(x - 3\right) + 2\left(\alpha - 1\right).$$

Λύση

Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4\cdot 3-5\alpha+2<\alpha(3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow 12-5\alpha+2<2\alpha-2\Leftrightarrow 16<7\alpha\Leftrightarrow \alpha>\frac{16}{7}.$$

Ο αριθμός -3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4\cdot(-3)-5\alpha+2<\alpha(-3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow -12-5\alpha+2<-6\alpha+2\alpha-2$$

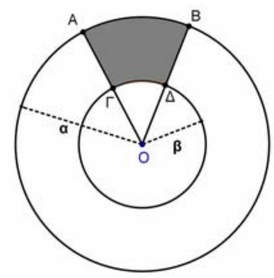
$$\Leftrightarrow -8<\alpha\Leftrightarrow \alpha>-8.$$

Επομένως οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης , όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις $\alpha>\frac{16}{7}$ και $\alpha>-8$, δηλαδή όταν $\alpha>\frac{16}{7}$.

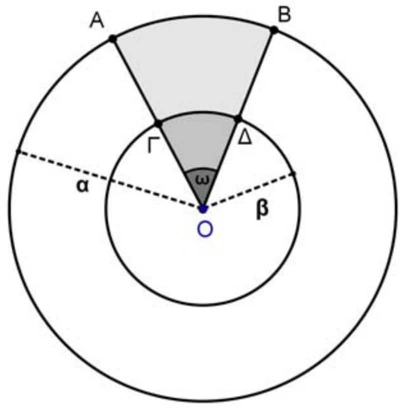
Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega=\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$



Λύση



Σχήμα 2

Το εμβαδόν του χωρίου ΑΒΔΓ ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων $\left(\mathrm{O},\widehat{\mathrm{AB}}\right)$ και $\left(\mathrm{O},\widehat{\Gamma\Delta}\right)$, δηλαδή είναι

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\Gamma)=\pi\alpha^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}-\pi\beta^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\omega}{2}.$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, ισούται με $\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)=\pi(\alpha^2-\beta^2)$, οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\Gamma)}{\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{(\alpha^2-\beta^2)\omega}{2\pi(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}.$$

Επειδή είναι $\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 2\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, έχουμε

$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)^3=\left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{1}{512}.$$

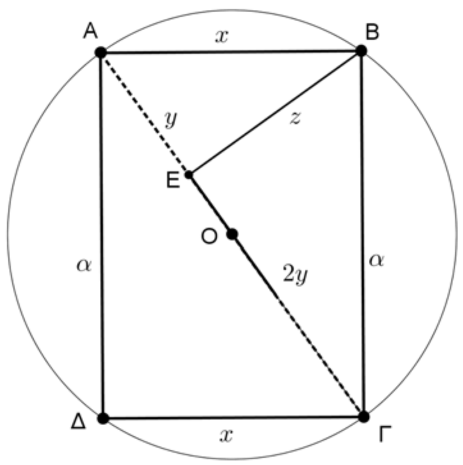
Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ=\alpha$ cm και $ΑΒ<ΑΔ$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $ΕΓ=2\cdot ΑΕ$, να βρείτε:

(i) το μήκος της πλευράς ΑΒ

(ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Λύση



Σχήμα 3

(i) Έστω $ΑΒ=ΓΔ=x$, $ΑΕ=y$, $ΕΓ=2y$ και $ΒΖ=z$.

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα ΑΒΕ έχουμε:

$$x^2=y^2+z^2\Rightarrow z^2=x^2-y^2. \quad (1)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα ΒΓΕ έχουμε:

$$\alpha^2=4y^2+z^2\Rightarrow z^2=\alpha^2-4y^2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha^2-4y^2=x^2-y^2\Rightarrow x^2=\alpha^2-3y^2 \quad (3)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$9y^2=x^2+\alpha^2\Rightarrow x^2=9y^2-\alpha^2. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$9y^2-\alpha^2=\alpha^2-3y^2\Rightarrow y^2=\frac{\alpha^2}{6}\Rightarrow y=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6},$$

οπότε λαμβάνουμε και

$$x^2=\alpha^2-3\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2=\alpha^2-3\cdot\frac{\alpha^2}{6}=\frac{\alpha^2}{2}\Rightarrow x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) Διάμετρος του κύκλου είναι η $ΑΓ=3y$, οπότε η ακτίνα του είναι $R=\frac{3}{2}y=\frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$. Το εμβαδό του κύκλου είναι $E=\pi R^2=\pi\cdot\frac{6\alpha^2}{16}=\frac{3\pi\alpha^2}{8}$.