Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\kappa\ \alpha \neq 0$ και $-1 < \alpha < 1$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha$,

όπου

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}},\ \mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Λύση

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι $1+\alpha > 0$ και $1-\alpha > 0$, οπότε

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha+1-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$\mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha-(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha = \frac{1}{\alpha} - 1 + \alpha = \frac{1-\alpha+\alpha^2}{\alpha}.$$

Επειδή είναι $1-\alpha+\alpha^2 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, για όλες τις τιμές του α, έπεται ότι η παράσταση Κ έχει το πρόσημο του α, δηλαδή θετικό, αν $0 < \alpha < 1$ και αρνητικό, αν $-1 < \alpha < 0$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\kappa^2 - 4\left(-1+\kappa^2\right) = 4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = \kappa + 1$ και $x_2 = \kappa - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(0,5)$, όταν

$$0 < \kappa + 1 < 5 \text{ και } 0 < \kappa - 1 < 5 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 4 \text{ και } 1 < \kappa < 6 \Leftrightarrow 1 < \kappa < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\kappa+1)^4 + (\kappa-1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2\kappa^4 + 12\kappa^2 + 2 = 82 \Leftrightarrow \kappa^4 + 6\kappa^2 - 40 = 0,$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\kappa^2 = 4 \text{ ή } \kappa^2 = -10 \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = -2.$$

Επομένως για $\kappa = 2$ ισχύει το ζητούμενο, αφού η τιμή $\kappa = -2$ απορρίπτεται λόγω της σχέσης $1 < \kappa < 4$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3} = \frac{y}{2012y+5} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Λύση

Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+3}{x} = \frac{2012y+5}{y} = \frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012+\frac{3}{x} = 2012+\frac{5}{y} = 2012+\frac{7}{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{y} = \frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{3}{x} = \frac{5}{y} = \frac{7}{z} = \frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x = 3\lambda,\ y = 5\lambda,\ z = 7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747 θα έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 = 83\lambda^2 \,|\, 747 \Rightarrow \frac{747}{83\lambda^2} = \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{9}{\lambda^2} = \kappa \in \mathbb{Z},$$

Επομένως οι μοναδικές αποδεκτές τιμές για το λ^2 είναι οι 1, 3 και 9.

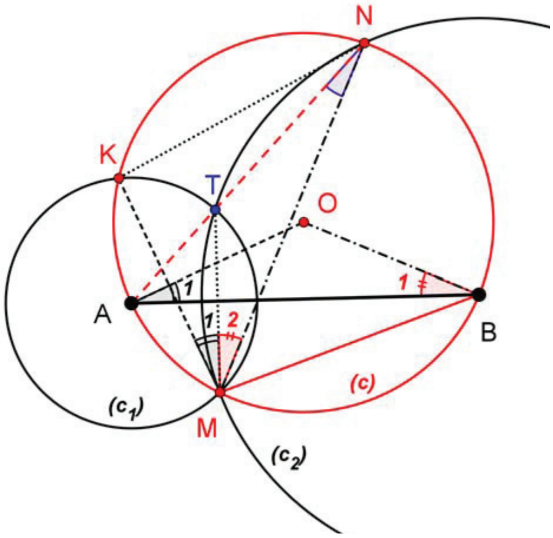
- Για $\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ έπεται ότι $(x, y, z) = (3, 5, 7)$ ή $(x, y, z) = (-3, -5, -7)$.
- Για $\lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$ προκύπτουν για τα x, y, z μη ακέραιες τιμές, άτοπο.
- Για $\lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$ έπεται ότι $(x, y, z) = (9, 15, 21)$ ή $(x, y, z) = (-9, -15, -21)$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O, R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A, AM)$ και $c_2(B, BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O, R)$ στα σημεία K και N αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A, AM)$ και $c_2(B, BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η διάκεντρος τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 5

Η KM είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_1(A,AM)$. Άρα

η OA είναι μεσοκάθετη της KM. (1)

Η MT είναι κοινή χορδή των κύκλων $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η AB είναι μεσοκάθετη της MT. (2)

Η MN είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η OB είναι μεσοκάθετη της MN. (3)

Από τις καθετότητες (1) και (2), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{A}_1 = \hat{M}_1$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες).

Από τις καθετότητες (2) και (3), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{B}_1 = \hat{M}_2$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες)

και τελικά από το ισοσκελές τρίγωνο OAB, έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1.$$

Οι τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών μας οδηγούν στην ισότητα: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

Η γωνία $A\hat{N}M$ και $A\hat{B}M$ είναι ίσες, διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AM}$.

Η γωνία $T\hat{N}M$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο $c_2(B,BM)$, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας $T\hat{B}M$, δηλαδή: $T\hat{N}M = A\hat{B}M$

Άρα $A\hat{N}M = T\hat{N}M$ και κατά συνέπεια τα σημεία A, T, N είναι συνευθειακά.

Ισχύει τώρα η ισότητα $A\hat{N}K = A\hat{N}M$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα AM και AK). Επομένως η NA είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{N}M$.