υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω α, β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, Τότε θα είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\upsilon \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \upsilon.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων), οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\upsilon) = 7 \cdot (108 + \upsilon) \Leftrightarrow \text{ (από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\upsilon = 756 + 7\upsilon \Leftrightarrow 18\upsilon = 36 \Leftrightarrow \upsilon = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110.$$

2ος τρόπος.

Έχουμε: $\alpha = 18 \cdot 8 + \upsilon_1$, με $\upsilon_1 = 0,1,2,...,17$ και $\beta = 12 \cdot 9 + \upsilon_2$, με $\upsilon_2 = 0,1,2,...,11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\upsilon_1 = 5\upsilon_2$ είναι τα :

$$(\upsilon_1, \upsilon_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10,2)$ μας δίνει $\alpha = 154$ και $\beta = 110$ και το κλάσμα $\frac{154}{110}$ που είναι ισοδύναμο με το $\frac{7}{5}$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Λύση

Έχουμε: $4 < 5$, οπότε $\sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5}$. Είναι

$2,1^2 = 4,41$, $2,2^2 = 4,84$ και $2,3^2 = 5,29$, οπότε η ζητούμενη τιμή του α είναι $\alpha = 2,2$.

Με αντικατάσταση βρίσκουμε: $\mathrm{A} = 2$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}.$$

Λύση

Έχουμε $-4 < 1 - 2\beta < 5 \Leftrightarrow -5 < -2\beta < 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{2} < \frac{-2\beta}{-2} < \frac{-5}{-2} \Leftrightarrow -2 < \beta < \frac{5}{2}$. Επειδή ο β είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\beta = 1$ ή $\beta = 2$.

- Για $\beta=1$ η ανίσωση γίνεται: $2(x+1)-\frac{3}{2}(x+1)<x \Leftrightarrow \frac{x+1}{2}<x \Leftrightarrow x>1$.
- Για $\beta=2$ η ανίσωση γίνεται:
$2(x+1)-\frac{3}{2}(x+1)<\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2}<\frac{x}{2} \Leftrightarrow 0\cdot x<-1$, η οποία είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O \psi$ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45^0 και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2,-6)$. Το σημείο Α ανήκει στον άξονα $\chi'\chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο Β ανήκει στον άξονα $\psi'\psi$ και στην ευθεία (ε).

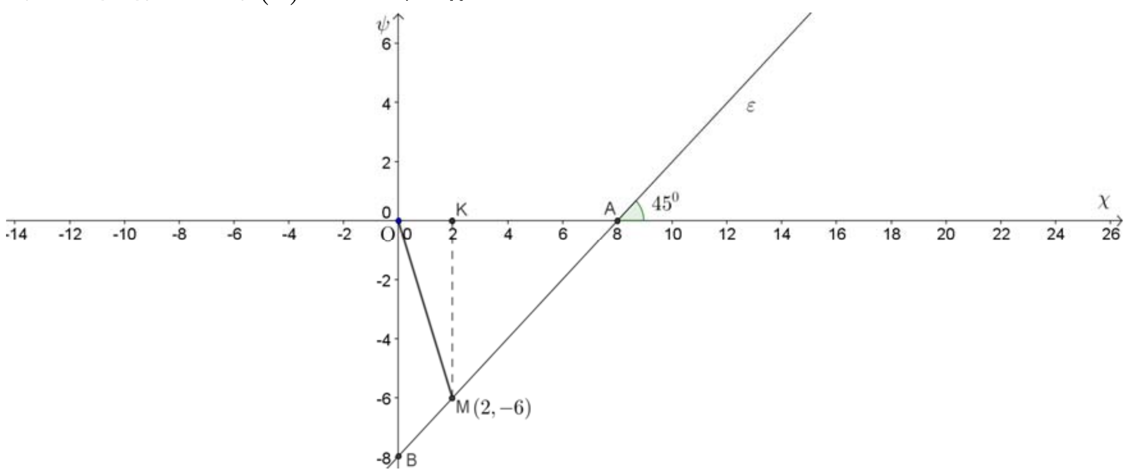
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ.

Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή $\psi=\alpha\chi+\beta$, όπου $\alpha=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$. Επειδή η ευθεία περνάει από το σημείο $M(2,-6)$ έχουμε ότι $-6=2+\beta \Leftrightarrow \beta=-8$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι : $\psi=\chi-8$



Σχήμα 2

β) Τα σημεία τομής με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ είναι τα $A(8,0)$ και $B(0,-8)$. Άρα έχουμε

$$(OAB)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32 \text{ τετρ. μονάδες}$$

γ) Αν Κ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$, τότε το τρίγωνο ΚΜΑ είναι ορθογώνιο στο Κ και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη $KM=6$ και $KA=6$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε

$$AM=\sqrt{KM^2+KA^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}.$$

Ομοίως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{64\cdot 2}=8\sqrt{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΑΒ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Ο, έστω υ, έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{OAM})}{(\mathrm{OAB})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AM}\cdot \upsilon}{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \upsilon}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{6\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$(\mathrm{OAM})=\frac{3}{4}(\mathrm{OAB})=\frac{3}{4}\cdot 32=24 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

Παρατήρηση:

Το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΜ, μπορούμε να το υπολογίσουμε, παρατηρώντας ότι η ΚΜ είναι ύψος του τριγώνου ΟΑΜ (έχει μήκος 6) και η ΟΑ βάση με μήκος 8.

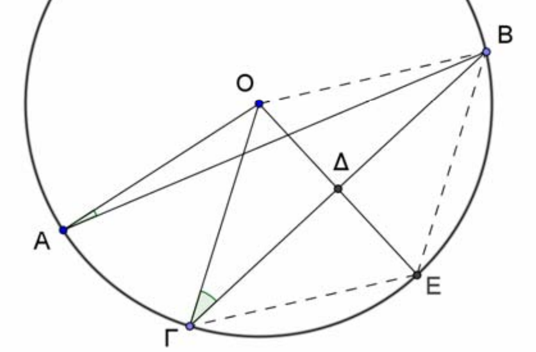
Άρα $(\mathrm{OAM})=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$ **.**

6. Σε κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $\mathrm{O\hat{A}B}=10^\circ$ και $\mathrm{O\hat{\Gamma}B}=30^\circ$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=R)$, έπεται ότι:

$$\mathrm{O\hat{B}A}=\mathrm{O\hat{A}B}=10^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O\Gamma}=\mathrm{OB}=R)$, έπεται ότι:

$$\mathrm{O\hat{\Gamma}B}=\mathrm{O\hat{B}\Gamma}=30^\circ.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=\mathrm{O\hat{B}\Gamma}-\mathrm{O\hat{B}A}=30^\circ-10^\circ=20^\circ$ και $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}=40^\circ$.

(β) Το ύψος του τριγώνου ΟΓΒ είναι και διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{\Gamma\hat{O}B}$, οπότε $\mathrm{\Gamma\hat{O}\Delta}=90^\circ-\mathrm{O\hat{\Gamma}\Delta}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$, οπότε θα είναι και $\mathrm{\Gamma\hat{O}E}=60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισόπλευρο, οπότε $\mathrm{\Gamma E}=\mathrm{O\Gamma}=R$. Επειδή η ευθεία ΟΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $\text{ΕΒ} = \text{ΓΕ} = R$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΕΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες , δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $\text{ΟΔ} = \text{ΟΓ} \cdot \eta\mu 30^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$, οπότε $(\text{ΟΒΕΓ}) = R \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2}{2}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\ \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{και } (\Sigma_2)\ \begin{cases} \alpha x + \beta y = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{cases}$$

έχουν την ίδια λύση (x, y), να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{x} = \varphi$ και $\frac{1}{y} = \omega$, το σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\begin{cases} \varphi + \omega = \dfrac{1}{4} \\ 3\varphi + 4\omega = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{4} - \omega \\ 3\left(\dfrac{1}{4} - \omega\right) + 4\omega = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{4} - \omega \\ \omega = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{2} \\ \omega = -\dfrac{1}{4} \end{cases},$$

οπότε το σύστημα (Σ_1) έχει τη λύση: $(x, y) = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}\right) = (2, -4)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα (Σ_2), οπότε θα έχουμε;

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta = 4 \\ 4\alpha - 12\beta = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha - 3\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 2 \\ -\beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 10 \\ \beta = 4 \end{cases}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \qquad \text{και} \qquad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.

Λύση

(α) Επειδή $z = 3(x - y) > 0 \Rightarrow x - y > 0$, έπεται ότι $x > y$.

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z = 2(x + y) = 3(x - y) \Leftrightarrow 2x + 2y = 3x - 3y \Leftrightarrow x = 5y,$$

οπότε προκύπτει: $z = 2x + 2y = 12y$, οπότε $z - x = 12y - 5y = 7y > 0$, οπότε $z > x$.

Άρα έχουμε: $z > x > y \Leftrightarrow y < x < z$.

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι $y > 0$, έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 680 \Leftrightarrow 25y^2 + y^2 + 144y^2 = 680 \Leftrightarrow 170y^2 = 680 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Άρα είναι: $(x, y, z) = (10, 2, 24)$.