Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2+3x+1}{x}-\frac{27x}{9x^2+3x+1}\geq 6.$$

Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή είναι $x>0$ θα είναι και $9x^2+3x+1>0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\left(9x^2+3x+1\right)^2-27x^2\geq 6x\left(9x^2+3x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+3x+1\right)^2-6x\left(9x^2+3x+1\right)-27x^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+3x+1\right)\left(9x^2-3x+1\right)-27x^2\geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+1\right)^2-9x^2-27x^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+1\right)^2-36x^2\geq 0 \Leftrightarrow \left(9x^2-1\right)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $9x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{9} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$, αφού $x>0$.

Πρόβλημα 2

Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α,β,γ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1=1$ και $x_2=\beta$.

Λύση

Αφού οι αριθμοί 1 και β είναι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε:

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \qquad (1)$$

$$\alpha\beta^2+\beta^2+\gamma=0. \qquad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\alpha\left(\beta^2-1\right)+\beta\left(\beta-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(\beta-1\right)\left(\alpha\beta+\alpha+\beta\right)=0 \Leftrightarrow \beta=1 \text{ ή } \alpha\beta+\alpha+\beta=0.$$

Αν υποθέσουμε ότι είναι $\beta=1$, τότε $\alpha+\gamma=-1$ και $\alpha+\gamma=0$, αδύνατο.

Άρα είναι $\beta\neq 1$, οπότε θα είναι:

$$\alpha\beta+\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{\beta}{\beta+1}=-1+\frac{1}{\beta+1}\ .$$

Επειδή $\alpha \in \mathbb{Z}$ πρέπει: $\dfrac{1}{\beta+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta \in \{-2,0\}$. Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\beta = 0$, οπότε έχουμε: $\alpha + \gamma = 0$ και $\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0,$ το οποίο απορρίπτεται αφού από την υπόθεση έχουμε $\alpha \neq 0$.
- $\beta = -2$, οπότε έχουμε $\alpha + \gamma = 2$ και $4\alpha + \gamma = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2,\ \gamma = 4$. Επομένως προκύπτει η τριάδα συντελεστών $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, -2, 4)$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Λύση
Θέλουμε να βρούμε για ποιους θετικούς ακεραίους λ έχει λύση ως προς x η εξίσωση

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2} = \lambda \Leftrightarrow (2-\lambda)x^2 + (1+\lambda)x - 2(2+\lambda) = 0.$$

Αν $\lambda = 2$ προκύπτει από την εξίσωση η λύση $x = \dfrac{8}{3}$.
Αν $\lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση ως προς x, αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta = (\lambda+1)^2 + 8(4-\lambda^2) = -7\lambda^2 + 2\lambda + 33 = (-\lambda^2 + 2\lambda) + (33 - 6\lambda^2),$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda \geq 3$ και οι δύο παρενθέσεις είναι αρνητικές, οπότε $\Delta < 0$.
Επομένως, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, διάφορος του 2, έπεται ότι: $\lambda = 1$. Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{7}$.
Άρα για $x = \dfrac{8}{3}$ το κλάσμα παίρνει την ακέραια τιμή 2 και για $x = -1 \pm \sqrt{7}$ παίρνει την ακέραια τιμή 1.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B, AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K, Λ, M, N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

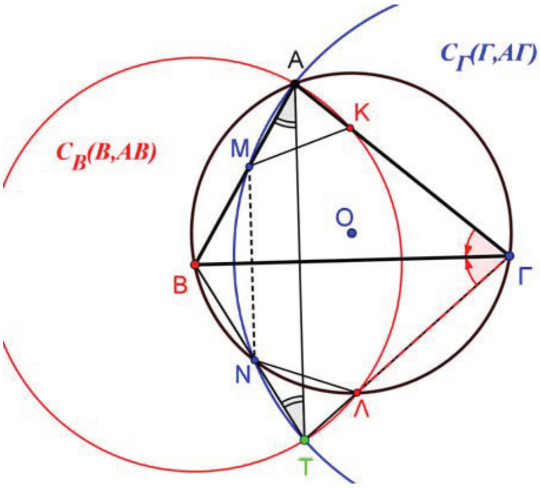
Λύση
Έστω T το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων C_A και C_B. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία T, Λ, Γ είναι συνευθειακά.
Οι χορδές BA και $B\Lambda$ του κύκλου C είναι ίσες μεταξύ τους, διότι είναι ακτίνες του κύκλου C_A, οπότε οι εγγεγραμμένες (στο κύκλο C) γωνίες που βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα, θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} \qquad (1).$$

Η $B\Gamma$ είναι διάκεντρος των κύκλων C_B και C_Γ, οπότε θα είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής AT και θα διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Gamma}T$, δηλαδή

$$B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}T = \hat{\Gamma} \qquad (2).$$

Άρα τα σημεία T, Λ, Γ είναι συνευθειακά.



Σχήμα 5

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία T, N, B είναι συνευθειακά.

Το τρίγωνο BAT είναι ισοσκελές ($BA = BT$). Άρα $M\hat{A}T = N\hat{T}A$, οπότε τα αντίστοιχα τόξα AN και MT (του κύκλου C_Γ) είναι ίσα μεταξύ τους.

Από την ισότητα των τόξων $AN = AM + MN$ και $MT = TN + MN$, προκύπτει η ισότητα των τόξων AM και TN. Άρα το τετράπλευρο $MATN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $MN \parallel AT$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $KAT\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $K\Lambda \parallel AT$. Άρα $MN \parallel K\Lambda$ και κατά συνέπεια το $MK\Lambda N$ είναι τραπέζιο και η $B\Gamma$ είναι κοινή μεσοκάθετη των παράλληλων πλευρών του.

Τα τρίγωνα AKM και $T\Lambda N$ είναι ίσα. Άρα το $MK\Lambda N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.