$$\mathrm{A\hat{B}K} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ = \mathrm{A\hat{M}K}.$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΜ = ΑΒ. Από υπόθεση είναι ΑΒ = ΑΓ. Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΖΑΒ έχουμε

$$\mathrm{A\hat{Z}B} = 180^\circ - 2\hat{\mathrm{B}} = 180^\circ - 2\cdot 72^\circ = 36^\circ = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}.$$

Επομένως και το τρίγωνο ΓΑΖ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΖ. Άρα έχουμε:

ΑΜ = ΑΒ = ΑΓ = ΓΖ.

**(γ)** Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε: $\Lambda\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 90^\circ - \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$, ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΒ έχουμε: $\Lambda\mathrm{BZ} = \mathrm{KB}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

Άρα έχουμε: $\Lambda\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \Lambda\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 18^\circ \Rightarrow$ ΛΒΖ ισοσκελές τρίγωνο με ΒΛ = ΛΖ.

**Πρόβλημα 4**

Αν οι $x, y, z, w, m$ είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = (x+y)\cdot z^m - w$.

**Λύση**

Από τη συνθήκη, οι $x, y, z, w, m$ είναι οι αριθμοί 1,2,3,4,5 με διαφορετική ίσως σειρά.

Για τη μέγιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο ελάχιστος, δηλαδή $w = 1$. Τους αριθμούς 4 και 5 πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε στη δύναμη $z^m$. Παρατηρούμε ότι $4^5 > 5^4$, οπότε για τη μέγιστη τιμή $z = 4, m = 5$. Οπότε απομένει να έχουμε $x + y = 2 + 3 = 5$. Συνεπώς η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $5\cdot 4^5 - 1 = 5\cdot 1024 - 1 = 5119$.

Για την ελάχιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο μέγιστος, δηλαδή $w = 5$ και η δύναμη $z^m$ να είναι η ελάχιστη, οπότε $z = 1$. Η μικρότερη τιμή τώρα για το $x + y$ είναι $x + y = 2 + 3 = 5$ η ελάχιστη τιμή είναι $5\cdot 1^4 - 5 = 0$.

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να λύσετε την ανίσωση: $2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4}$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda$ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του $x$ για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

**Λύση.** Έχουμε:

$$2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow 2x + x^2 - 1 < x^2 + x - 2 + \lambda \Leftrightarrow x < \lambda - 1,$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x - 2 - 3 > 2x - 2 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{3}{2} < x < \lambda - 1,$, εφόσον ισχύει:

$$\lambda - 1 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda > \frac{5}{2}.$$

**Πρόβλημα 2**

Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{matrix} x+y-1=6(x-3)(y+2) \\ \dfrac{3}{x-3}-\dfrac{4}{y+2}=11 \end{matrix}\right\}$

**Λύση**

Οι περιορισμοί είναι $x \neq 3, y \neq -2$. Θέτουμε $\frac{1}{x-3}=a$ και $\frac{1}{y+2}=b$ , οπότε

$$x+y-1=(x-3)+(y+2)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}..$$

Επομένως, με περιορισμό $a,b \neq 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{6}{ab} \\ 3a-4b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ 3a-4b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6-b \\ 3(6-b)-4b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a=6-b \\ 7b=7 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a=5 \\ b=1 \end{matrix}\right\},$$

οπότε $x=\frac{16}{5}, y=-1$ , που πληρούν τους περιορισμούς.

**Πρόβλημα 3**

Να βρεθούν οι ακέραιοι $x, y$ που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x+y+x^2+y^2=p,$$

όπου $p$ πρώτος θετικός ακέραιος.

**Λύση**

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται: $x+x^2+y+y^2=p \Leftrightarrow x(x+1)+y(y+1)=p \quad (1)$

Όμως οι αριθμοί $x(x+1)$, $y(y+1)$ ως γινόμενα διαδοχικών ακέραιων **είναι και οι δύο άρτιοι**, οπότε και το άθροισμα τους θα είναι άρτιος. Επομένως πρέπει $p=2$, αφού ο μοναδικός πρώτος που είναι άρτιος είναι το 2. Επειδή οι ακέραιοι $x(x+1)$, $y(y+1)$ **είναι άρτιοι μη αρνητικοί**, έχουμε:

$$x(x+1)+y(y+1)=2 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x(x+1)=2 \\ y(y+1)=0 \end{matrix}\right\}(\Sigma_1) \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x(x+1)=0 \\ y(y+1)=2 \end{matrix}\right\}(\Sigma_2)$$

Έχουμε

$$x(x+1)=2 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ και } y(y+1)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ή } y=-1.$$

Επομένως το σύστημα $(\Sigma_1)$ έχει τις λύσεις:

$$(x,y)=(1,0) \text{ ή } (1,-1) \text{ ή } (-2,0) \text{ ή } (-2,-1)$$

Ομοίως, για το σύστημα $(\Sigma_2)$ βρίσκουμε τις λύσεις:

$$(x,y)=(0,1) \text{ ή } (-1,1) \text{ ή } (0,-2) \text{ ή } (-1,-2).$$

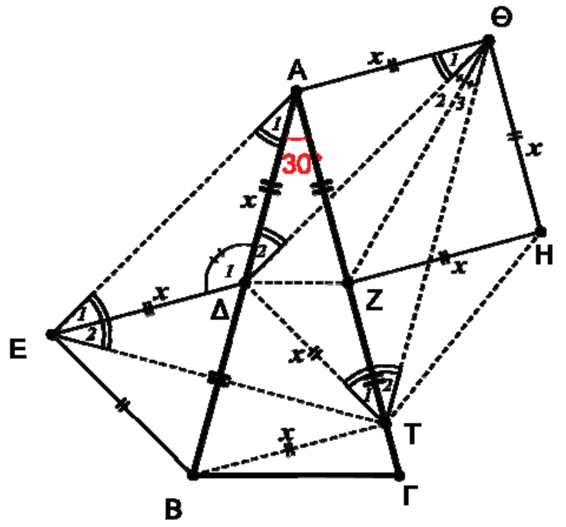
**Πρόβλημα 4**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^o$. Έστω $\Delta, Z$ τα μέσα των $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$ και τετράγωνο $AZH\Theta$. Η μεσοκάθετη του $B\Delta$, τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο $T$. Να αποδείξετε ότι:

**(α)** το τρίγωνο $AET$ είναι ισόπλευρο,

**(β)** τα τρίγωνα $ATB$ και $\Delta\Theta T$ είναι ίσα.

**Λύση**




Σχήμα 3

**(α)** Το τρίγωνο $\Delta AE$ είναι ισοσκελές ($\Delta A = \Delta E = x$) με $\hat{\Delta}_1 = 120^o$. Άρα

$$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = 30^o.$$

Η $ET$ είναι μεσοκάθετη της $B\Delta$, άρα (από το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$) έχουμε:

$$\hat{E}_2 = \frac{B\hat{E}\Delta}{2} = 30^o.$$

Στο τρίγωνο $AET$ έχουμε, $E\hat{A}T = \hat{A}_1 + \hat{A} = 60^o$ και $A\hat{E}T = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 60^o$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

**(β)** Στο ισόπλευρο τρίγωνο η $AB$ είναι κάθετη (άρα και μεσοκάθετη) της $ET$. Άρα

$$\Delta E = \Delta T = BT = x \qquad (1).$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα $A\Delta\Theta$ και $A\Delta T$ είναι ίσα μεταξύ τους διότι,

$$A\Delta = A\Theta = \Delta T = x \text{ και } \Delta\hat{A}\Theta = A\hat{\Delta}T = 120^o.$$

Άρα έχουμε

$$\Delta\Theta = AT \qquad (2).$$

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\Theta\hat{\Delta}T = 180^o - \hat{\Delta}_2 - B\hat{\Delta}T = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o.$$

$$A\hat{T}B = \hat{T}_1 + B\hat{T}\Delta = 30^o + 60^o = 90^o.$$

Έχουμε δηλαδή ότι τα τρίγωνα $ATB$ και $\Delta\Theta T$ είναι ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

**Παρατήρηση.** Επιπλέον, στο σημείο $Z$ τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $\Delta\Theta T$, δηλαδή το σημείο $Z$ είναι έκκεντρο του τριγώνου $\Delta\Theta T$.