Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y}^2} + \sqrt{\mathrm{x}^4 + 32\mathrm{y}^2}$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη των x, y .

Λύση

Έχουμε ότι $x^4 + 5x^2 + 2y^2 = x^4 + 5x^2 + 4 - x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$, οπότε

$$\sqrt{x^4 + 5x^2 + 2y^2} = x^2 + 2 .$$

Επιπλέον $x^4 + 32y^2 = \left(4 - 2y^2\right)^2 + 32y^2 = 16 + 16y^2 + 4y^4 = 4\left(y^2 + 2\right)^2$, οπότε

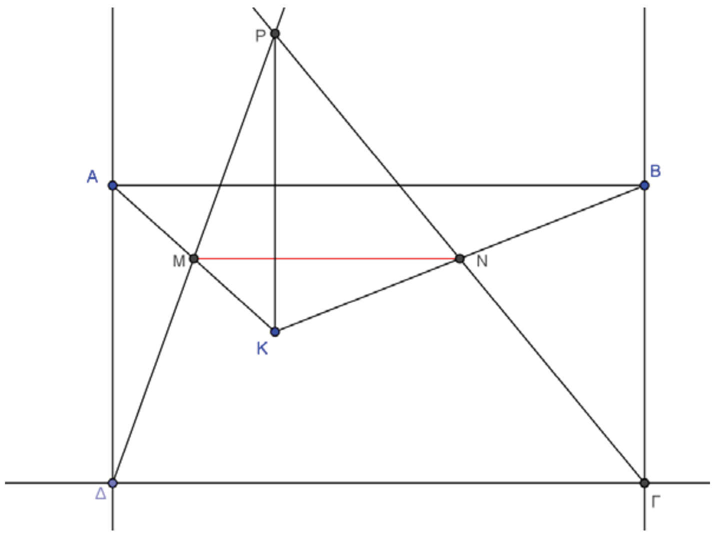
$$\sqrt{x^4 + 32y^2} = 2(y^2 + 2) .$$

Συνεπώς $\mathrm{A} = x^2 + 2 + 2(y^2 + 2) = x^2 + 2y^2 + 6 = 4 + 6 = 10$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ και σημείο K στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα $\mathrm{M, N}$ των $\mathrm{AK, BK}$ αντίστοιχα και έστω ότι οι ευθείες $\mathrm{\Gamma N, \Delta M}$ τέμνονται στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\mathrm{\Gamma\Delta}$.

Λύση



Σχήμα 4

Στο τρίγωνο AKB το τμήμα MN συνδέει τα μέσα των πλευρών του, άρα $\mathrm{MN} // \mathrm{AB}$ και $\mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$. Όμως το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε $\mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma\Delta}$, επομένως $\mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{2}$ και επιπλέον $\mathrm{AB} // \mathrm{\Gamma\Delta}$ οπότε και $\mathrm{MN} // \mathrm{\Gamma\Delta}$.
Από την τελευταία παραλληλία έπεται ότι τα τρίγωνα $\mathrm{PMN, P\Delta\Gamma}$ είναι όμοια με λόγο

ομοιότητας $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{MN}}=2$, οπότε θα είναι και $\frac{\mathrm{P}\Delta}{\mathrm{PM}}=2$ οπότε το M είναι το μέσον του $\mathrm{P}\Delta$. Άρα στο τετράπλευρο $\mathrm{PA}\Delta\mathrm{K}$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως, $\mathrm{PK} \mathbin{//} \mathrm{A}\Delta$, οπότε, αφού $\mathrm{A}\Delta \perp \Gamma\Delta$, έπεται ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\Gamma\Delta$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ότι ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος.

(α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{5a}{2}, \frac{a+2}{5}, a$.

(β) Να βρείτε το υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-a}{2}-\frac{x}{2}\le\frac{2x+a}{3},\quad 2(3x-a)+x>2(x+1)-a,\quad a-x\le 2(x-a)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α.

Λύση

(α) Αφού $a>0$, έχουμε: $\frac{5a}{2}-a=\frac{3a}{2}>0 \Leftrightarrow \frac{5a}{2}>a$. Επίσης, έχουμε

$a>\frac{a+2}{5} \Leftrightarrow 5a>a+2 \Leftrightarrow 4a>2 \Leftrightarrow a>\frac{1}{2}$, που ισχύει αφού ο a είναι θετικός ακέραιος Άρα $a>\frac{a+2}{5}$.

Επομένως έχουμε τη διάταξη: $\frac{a+2}{5}<a<\frac{5a}{2}$.

(β) Λύνουμε καθεμία από τις δεδομένες ανισώσεις. Έχουμε:

- $\frac{3x-a}{2}-\frac{x}{2}\le\frac{2x+a}{3} \Leftrightarrow 9x-3a-3x\le 4x+2a \Leftrightarrow 2x\le 5a \Leftrightarrow x\le\frac{5a}{2}$.
- $2(3x-a)+x>2(x+1)-a \Leftrightarrow 6x-2a+x>2x+2-a \Leftrightarrow 5x>a+2 \Leftrightarrow x>\frac{a+2}{5}$.
- $a-x\le 2(x-a) \Leftrightarrow a-x\le 2x-2a \Leftrightarrow 3a\le 3x \Leftrightarrow x\ge a$.

Επειδή ισχύει ότι $\frac{a+2}{5}<a<\frac{5a}{2}$, το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις είναι: $\mathrm{A}=\left\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le\frac{5a}{2},\ a\in\mathbb{Z}_+^*\right\}=\left[a,\frac{5a}{2}\right],\ a\in\mathbb{Z}_+^*.$.

Για την εύρεση των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α θα προσδιορίσουμε τον ελάχιστο και μέγιστο ακέραιο του συνόλου Α. Αν αυτοί είναι m και Μ, αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των ακέραιων που περιέχονται στο σύνολο Α είναι: $(M-m)+1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $a=2k, k\in\mathbb{N}^*$. Τότε $\mathrm{A}=[2k,5k]$, οπότε περιέχει $3k+1=\frac{3a}{2}+1$ ακέραιους.
- $a=2k+1, k\in\mathbb{N}$. Τότε $\mathrm{A}=\left[2k+1,5k+\frac{5}{2}\right]=\left[2k+1,5k+2+\frac{1}{2}\right]$, οπότε περιέχει $3k+1+1=\frac{3(a-1)}{2}+2=\frac{3a}{2}+\frac{1}{2}$ ακέραιους.

Πρόβλημα 4

Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma:\begin{cases}\alpha\sqrt[3]{b}-c=\alpha\\ b\sqrt[3]{c}-\alpha=b\\ c\sqrt[3]{\alpha}-b=c\end{cases}$$

Λύση

Αν κάποιος από τους a,b,c είναι ίσος με 0, τότε από τις εξισώσεις βγαίνει ότι και οι άλλοι δύο πρέπει να είναι ίσοι με 0, οπότε $a=b=c=0$ είναι μία λύση. Υποθέτουμε τώρα ότι $a,b,c>0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο c είναι μεγαλύτερος ή ίσος των a,b. Τότε από την πρώτη σχέση έχουμε $\alpha\sqrt[3]{b}=\alpha+c\geq 2\alpha$, οπότε $\sqrt[3]{b}\geq 2$, δηλαδή $b\geq 8$ (1).

Οπότε θα είναι $c\geq 8$ (αφού είναι μεγαλύτερος ή ίσος του b). Οπότε από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε $b=b\sqrt[3]{c}-a\geq 2b-a$, οπότε $a\geq b$ και από την (1) έχουμε $a\geq 8$. Η τελευταία τώρα δίνει $c=c\sqrt[3]{a}-b\geq 2c-b$, οπότε $b\geq c$.

Επομένως, τελικά έχουμε $b\geq c\geq a\geq b$, δηλαδή $a=b=c$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε $a\sqrt[3]{a}=2a$ και αφού $a>0$, έχουμε ότι $a=8$, οπότε $a=b=c=8$ είναι λύση.

Τελικά οι δύο λύσεις είναι $(a,b,c)\in\{(0,0,0),(8,8,8)\}$.