

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \frac{\beta}{100} = 540 \Leftrightarrow \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \beta = 540\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100} \cdot \beta = 540\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{540\alpha \cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta = \frac{100\alpha}{100-\alpha}.$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του A , αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: 88, 89, 98, 99. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός A είναι διψήφιος, τότε πρέπει $A = 88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί 8888, 9988 έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι 8988, 9888, οπότε η ελάχιστη τιμή του A είναι 8988.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = \frac{12^v}{3^v} : 2^{2v-1}$ και $\beta = 10^{2v+1} : 100^v$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$$

Λύση

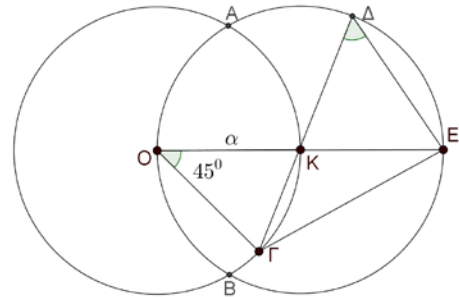
Έχουμε ότι $\alpha = \frac{12^v}{3^v} : 2^{2v-1} = \left(\frac{12}{3}\right)^v : 2^{2v-1} = 4^v : 2^{2v-1} = 2^{2v} : 2^{2v-1} = 2^{2v-(2v-1)} = 2.$

και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^\nu = 10^{2\nu+1} : 10^{2\nu} = 10$, οπότε είναι $\alpha^2 = 4$, $\alpha^3 = 8$ και

$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha} = \frac{(8-10)^3 + 40 - 20 + 8}{4 + 20 - 20} = \frac{-8 + 40 - 20 + 8}{4} = 5$$

Πρόβλημα 2

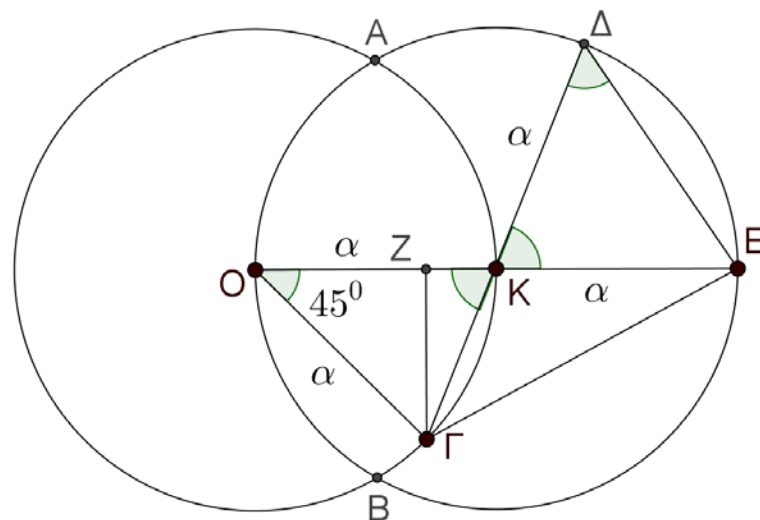
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $OK = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία O και K , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B . Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο KB και η ευθεία ΓK τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου K και ακτίνας α στο σημείο Δ . Η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου K και ακτίνας α στο σημείο E . Αν είναι $\widehat{K\hat{O}\Gamma} = 45^\circ$, να βρείτε :



- (α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{K\hat{\Delta}E}$,
- (β) το εμβαδόν του τριγώνου $O\Gamma E$ συναρτήσει του α .

Λύση

(α) Το τρίγωνο $OK\Gamma$ έχει $OK = O\Gamma = \alpha$, οπότε είναι ισοσκελές με βάση $K\Gamma$. Άρα έχει τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του ίσες, οπότε θα είναι:



Σχήμα 2

$$\widehat{OK\hat{\Gamma}} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Επίσης, επειδή οι γωνίες $\widehat{\Delta K\hat{E}}$ και $\widehat{OK\hat{\Gamma}}$ είναι κατά κορυφή, έχουμε

$$\widehat{\Delta K\hat{E}} = \widehat{OK\hat{\Gamma}} = 67,5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Η γωνία $\widehat{K\hat{\Delta}E}$ είναι μία από τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΔKE (έχει $K\Delta = KE = \alpha$), οπότε

$$\widehat{\text{ΚΛΕ}} = \frac{180^\circ - 67,5^\circ}{2} = \frac{112,5^\circ}{2} = 56,25^\circ \text{ μοίρες}$$

(β) Έστω ΓΖ το ύψος του τριγώνου ΟΓΕ από την κορυφή Γ. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΖ έχουμε

$$\text{ΓΖ} = \alpha \cdot \eta\mu 45^\circ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ είναι

$$\text{Ε(ΟΓΔ)} = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}.$$

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος και οι φίλοι του ήταν συνολικά x , όπου $x \geq 4$, από την υπόθεση. Τότε ο καθένας τους αρχικά πήρε $\frac{450}{x}$ καραμέλες. Ο τρεις φίλοι επέστρεψαν στο Γιώργο συνολικά

$$3 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{450}{x} = \frac{270}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Ο Γιώργος πήρε συνολικά

$$\frac{450}{x} + \frac{270}{x} = \frac{720}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, πρέπει:

$$\frac{720}{x} > 120 \Leftrightarrow 120x < 720 \Leftrightarrow x < 6.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές για το x είναι $x=4$ ή $x=5$. Όμως η τιμή $x=4$ απορρίπτεται, γιατί η διαίρεση $450:4$ δεν δίνει ακέραιο πηλίκο. Άρα είναι $x=5$ και ο Γιώργος πήρε συνολικά $\frac{720}{5} = 144$ καραμέλες.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \overline{3a5b} = 3 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + b \quad \text{και} \quad B = \overline{5c3d} = 5 \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + d.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a, b, c, d , ισχύει ότι: $\frac{A}{36} < \frac{B}{45}$

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{A}{36}$, $\frac{B}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να

βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a, b, c, d .

Λύση

(α) Ισχύει ότι $\frac{A}{36} = \frac{\overline{3a5b}}{36} < \frac{3959}{36} < \frac{3960}{36} = 110$. Επίσης η μικρότερη τιμή του $\overline{5c3d}$ λαμβάνεται όταν $c = d = 0$, άρα

$$\frac{B}{45} = \frac{\overline{5c3d}}{45} > \frac{5030}{45} > 111.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία a, b, c, d ισχύει ότι:

$$\frac{A}{36} = \frac{\overline{3a5b}}{36} < 110 < 111 < \frac{\overline{5c3d}}{45} = \frac{B}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους, το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι $\frac{A}{36} < 110 < 111 < \frac{B}{45}$.

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109 \leq \frac{\overline{3a5b}}{36} < 110 < 111 < \frac{\overline{5c3d}}{45} \leq 112.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι $\overline{3a5b} > 109 \cdot 36 \Leftrightarrow \overline{3a5b} > 3924$, οπότε πρέπει $a = 9$ και ο b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 9.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45} \leq 112 \Leftrightarrow \overline{5c3d} < 112 \cdot 45 \Leftrightarrow \overline{5c3d} < 5040,$$

οπότε $c = 0$ και το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) + 5x \leq x^3 + x + 19. \quad (1)$$

$$\frac{2x - 1}{3} - \frac{23}{9} > \frac{4x - 21}{9} \quad (2)$$

Λύση.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)(x - 1) + 5x \leq x^3 + x + 19 &\Leftrightarrow x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 + 5x \leq x^3 + x + 19 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 1 + 5x \leq x^3 + x + 19 \Leftrightarrow 4x \leq 20 \Leftrightarrow x \leq 5. \end{aligned}$$

$$\frac{2x - 1}{3} - \frac{23}{9} > \frac{4x - 21}{9} \Leftrightarrow 6x - 3 - 23 > 4x - 21 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{5}{2} < x \leq 5$, οπότε οι ακέραιες τιμές του x που τις συναληθεύουν είναι οι τιμές 3, 4 και 5.