Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος

$$\mathrm{A}=\left(\alpha^2+18\right)^2-\left(8\alpha+1\right)^2$$

είναι πρώτος.

Λύση
Έχουμε

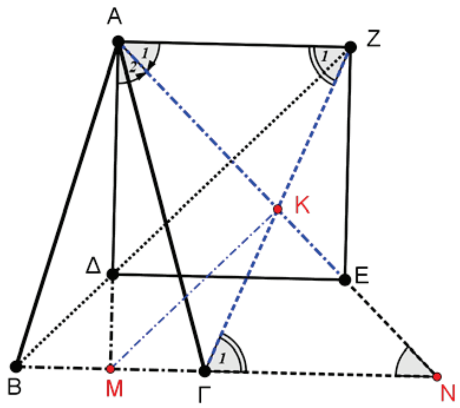
$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\alpha^2+18\right)^2-\left(8\alpha+1\right)^2=\left(\alpha^2+18+8\alpha+1\right)\left(\alpha^2+18-8\alpha-1\right)\\&=\left(\alpha^2+8\alpha+19\right)\left(\alpha^2-8\alpha+17\right)=\left[\left(\alpha+4\right)^2+3\right]\left[\left(\alpha-4\right)^2+1\right].\end{aligned}$$

Επειδή $\left(\alpha+4\right)^2+3\geq 3$, ο ακέραιος Α θα είναι πρώτος, μόνον όταν

$$\left(\alpha-4\right)^2+1=1\Leftrightarrow \alpha=4$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

Λύση



Σχήμα 3

Προεκτείνουμε τις ΑΕ , ΒΓ και έστω Ν το σημείο τομής τους.

Από την ισότητα των γωνιών $\widehat{\mathrm{A}}_1=\widehat{\mathrm{A}}_2=\widehat{\mathrm{N}}=45^\circ$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

Επομένως ΜΑ=ΜΝ⇔ΜΔ+ΔΑ=ΜΓ+ΓΝ και με δεδομένη την ισότητα ΜΓ=ΜΔ, καταλήγουμε: ΑΔ=ΓΝ=ΑΖ.

Θα συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ.

Ισχύουν οι ισότητες: α) ΓΝ=ΑΖ β) $\widehat{\Gamma}_1=\widehat{\mathrm{Z}}_1$ και γ) $\widehat{\mathrm{A}}_1=\widehat{\mathrm{N}}$.

Άρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ είναι ίσα, οπότε ΚΖ=ΚΓ και ΚΑ=ΚΝ.

Επομένως, η ΜΚ είναι διάμεσος (άρα και ύψος) στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΝ. Οπότε οι ΜΚ και ΔΖ είναι παράλληλες (διότι είναι και οι δύο κάθετες στην διαγώνιο ΑΕ.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} > 2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}. \qquad (1)$$

Πράγματι, η τελευταία είναι ισοδύναμη με

$$\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right)^2 > \frac{4(\alpha+1)}{\alpha} \Leftrightarrow (2\alpha+1)^2 > 4\alpha(\alpha+1) \Leftrightarrow 4\alpha^2+4\alpha+1 > 4\alpha^2+4\alpha,$$

που ισχύει.

Αν βάλουμε τώρα στην (1) όπου α το $\alpha+1$, παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+3}{\alpha+1} > 2\sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} \qquad (2)$$

Και ομοίως παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+5}{\alpha+2} > 2\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}} \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \frac{2\alpha+7}{\alpha+3} > 2\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη, έχουμε ότι:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\cdot\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} = 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{ x+\frac{1}{x}-w=2,\ \ y+\frac{1}{y}-w=2,\ \ z+\frac{1}{x}+w=2,\ \ y+\frac{1}{z}+w=2 \right\}.$$

Λύση
Έστω

$$\textbf{(Σ)}\ \left\{ x+\frac{1}{x}=w+2\ \ (1),\ y+\frac{1}{y}=w+2\ \ (2), z+\frac{1}{x}=2-w\ \ (3), y+\frac{1}{z}=2-w\ \ (4) \right\}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow x=y \ \text{ ή } \ xy=1.$$

Περίπτωση 1: Έστω $x=y$. Τότε από τις (3) και (4) έχουμε:

$$z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{z} \Leftrightarrow (z-x)\left(1+\frac{1}{zx}\right)=0 \Leftrightarrow x=z \ \text{ ή } \ xz=-1.$$

- Αν $x=z,$ τότε $x=y=z$ και από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

  $w=0$ και $x+\dfrac{1}{x}=2 \Leftrightarrow w=0$ και $x=1.$ Επομένως, σε αυτή την υποπερίπτωση έχουμε τη λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.
- Αν $xz=-1,$ τότε οι x,z θα είναι ετερόσημοι, οπότε ένας θα είναι αρνητικός.

Περίπτωση 2: Έστω $xy=1.$ Τότε με αφαίρεση της (4) από την (3) λαμβάνουμε:

$$z-\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow z^2-1=0 \Leftrightarrow z=1, \text{ αφού } z\geq 0.$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) λαμβάνουμε

$$x+\frac{2}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \ \text{ ή } \ x=2.$$

- Για $x=1$, προκύπτει πάλι η λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.
- Για $x=2$, προκύπτει η λύση $(x,y,z,w)=\left(2,\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{2}\right)$.