

ΦΥΛΛΟ – ΕΡΓΑΣΙΑΣ**ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:** Επαναληπτικό 1 – Απόλυτη τιμή**ΤΑΞΗ:** Α ΛΥΚΕΙΟΥ**ΗΜ/ΝΙΑ:** 3-4-20**A. Απλοποίηση παραστάσεων με απόλυτα.**

1. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\alpha. A = -2|x| + 4|1 - x| - 5|x + 2| + 10|x - 4| - 20|x - 5|,$$

αν $1 < x < 4$

Λύση

$$x > 1 > 0 : |x| = x$$

$$1 < x \Leftrightarrow 1 - x < 0$$

$$x > 0 \text{ και } 2 > 0 \text{ οπότε } x + 2 > 0$$

$$x < 4 \Leftrightarrow x - 4 < 0$$

$$x < 5 \Leftrightarrow x - 5 < 0$$

$$\begin{aligned} A &= -2x + 4(-1 + x) - 5(x + 2) + 10(-x + 4) - 20(-x + 5) \\ &= -2x - 4 + 4x - 5x - 10 - 10x + 40 + 20x - 100 = \\ &= \mathbf{7x - 74} \end{aligned}$$

$$\beta. B = |3x - 9| - 4x + 2$$

Λύση

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

$$1^{\eta}: 3x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$\text{Τότε: } B = 3x - 9 - 4x + 2 = -x - 7$$

$$2^{\eta}: 3x - 9 < 0 \Leftrightarrow x < 3$$

$$\text{Τότε: } B = -3x + 9 - 4x + 2 = -7x + 11$$

$$\gamma. \Gamma = 2|x - 2| - 3|x - 5|$$

Λύση

x	2	3
x-2	-	+
x-5	-	-

$$1^{\eta}) x \leq 2 :$$

$$B = 2(-x + 2) - 3(-x + 5) = -2x + 4 + 3x - 15 = x - 11$$

$$2^{\eta}) 2 < x \leq 3:$$

$$B = 2(x - 2) - 3(-x + 5) = 2x - 4 + 3x - 15 = 5x - 19$$

$$3^{\eta}) x > 5:$$

$$B = 2(x - 2) - 3(x - 5) = 2x - 4 - 3x + 15 = -x + 11$$

$$\delta. \Delta = ||x| + x| - 2|x - |x||$$

Λύση

$$\Delta = ||x| + x| - 2||x| - x|$$

Είναι:

$$|x| \geq -x \Leftrightarrow |x| + x \geq 0$$

$$\text{Άρα, } ||x| + x| = |x| + x$$

$$|x| \geq x \Leftrightarrow |x| - x \geq 0$$

$$\text{Άρα, } ||x| - x| = |x| - x$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \Delta &= |x| + x - 2(|x| - x) = |x| + x - 2|x| + 2x = -|x| + 3x = \\ &= \begin{cases} -x + 3x, & x \geq 0 \\ x + 3x, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 4x, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Β. Απόσταση 2 αριθμών

1) Βρείτε τις αποστάσεις: a) $d(-7,5)$ b) $d(4, -12)$

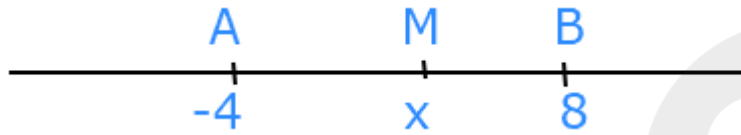
Λύση

$$\text{a) } d(-7,5) = |-7 - 5| = |-12| = 12$$

$$\text{b) } d(4, -12) = |4 - (-12)| = |16| = 16$$

2) Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -4, 8, x αντίστοιχα με

$$-4 < x < 8.$$



α. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των:

a. $|x+4|$ b) $|x-8|$

Λύση

a. $|x + 4| = |x - (-4)| = d(x, -4) = (AM)$

b. $|x - 8| = d(x, 8) = (MB)$

β. Με τη βοήθεια του άξονα να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $|x+4|+|x-8|$ και να βρεθεί η τιμή της.

Λύση

$$|x + 4| + |x - 8| = (AM) + (MB) = (AB) = 12$$

γ. Να αποδειχθεί αλγεβρικά το αποτέλεσμα του προηγούμενου αποτελέσματος.

$$x > -4 \Leftrightarrow x + 4 > 0$$

$$x < 8 \Leftrightarrow x - 8 < 0$$

$$|x + 4| + |x - 8| = x + 4 - x + 8 = 12$$

Γ. Ιδιότητες Απόλυτης τιμής

1) Να δειχθεί ότι ισχύει: $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$

Λύση

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 &= (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 \end{aligned}$$

2) Να δειχθεί ότι ισχύει $x|y| + y|x| \leq xy + |x||y|$

Λύση

$$\begin{aligned} x|y| + y|x| - xy - |x||y| &= x(|y| - y) + |x|(y - |y|) = \\ &= x(|y| - y) - |x|(|y| - y) = (|y| - y)(x - |x|) \leq 0 \end{aligned}$$

Γιατί:

$$|y| \geq y \Leftrightarrow |y| - y \geq 0$$

$$|x| \geq x \Leftrightarrow x \leq |x| \Leftrightarrow x - |x| \leq 0$$

3) Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$ να δειχθεί ότι:

α) $|2x + 3y| \leq 8$

β) $|-x - y + 3| \leq 6$

Λύση

α) $|2x + 3y| \leq |2x| + |3y| = 2|x| + 3|y| \leq 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$

β) $\begin{aligned} |-x - y + 3| &\leq |-x| + |-y| + |3| = \\ &= |x| + |y| + 3 \leq 1 + 2 + 3 = 6 \end{aligned}$

Δ. Εξισώσεις με απόλυτη τιμή

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $|3\chi - 5| = 10$

Λύση

$$|3\chi - 5| = 10 \Leftrightarrow 3\chi - 5 = 10 \text{ ή } 3\chi - 5 = -10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = 15 \text{ ή } 3\chi = -5 \Leftrightarrow \chi = 5 \text{ ή } \chi = -\frac{5}{3}$$

2. $|-2 + 6\chi| = -20$

Λύση

Η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός οπότε δεν μπορεί να είναι ίση με έναν αρνητικό. Η εξίσωση είναι αδύνατη.

3. $|6\chi - 18| = \chi - 2$

Λύση

$$\text{Πρέπει } \chi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2$$

$$|6\chi - 18| = \chi - 2 \Leftrightarrow 6\chi - 18 = \chi - 2 \text{ ή } 6\chi - 18 = -\chi + 2$$

$$5\chi = 16 \text{ ή } 7\chi = 20 \Leftrightarrow$$

$$\chi = \frac{16}{5} > 2 \text{ δεκτή ή } \chi = \frac{20}{7} > 2 \text{ δεκτή}$$

4. $|2x - 1| = x - 4$

Λύση

Πρέπει $x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

$|2x - 1| = x - 4 \Leftrightarrow$

$2x - 1 = x - 4 \text{ ή } 2x - 1 = -x + 4 \Leftrightarrow$

$x = -3 \text{ ή } 3x = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3 < 4 \text{ απορρίπτεται ή } x = \frac{5}{3} < 4 \text{ απορρίπτεται}$

Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

5. $|x + 4| = |2x - 1|$

Λύση

$|x + 4| = |2x - 1| \Leftrightarrow$

$x + 4 = 2x - 1 \text{ ή } x + 4 = -2x + 1 \Leftrightarrow$

$x - 2x = -4 - 1 \text{ ή } x + 2x = 1 - 4 \Leftrightarrow$

$-x = -5 \text{ ή } 3x = -3 \Leftrightarrow$

$x = 5 \text{ ή } x = -1$

$$6. \frac{1+|\chi|}{3} - \frac{1-2|\chi|}{6} = \frac{3|\chi|-1}{2} + 1$$

Λύση

$$\frac{1+|\chi|}{3} - \frac{1-2|\chi|}{6} = \frac{3|\chi|-1}{2} + 1 \Leftrightarrow$$

$$2(1+|\chi|) - (1-2|\chi|) = 3(3|\chi|-1) + 6 \Leftrightarrow$$

$$2 + 2|\chi| - 1 + 2|\chi| = 9|\chi| - 3 + 6 \Leftrightarrow$$

$$2|\chi| + 2|\chi| - 9|\chi| = -2 + 1 - 3 + 6 \Leftrightarrow$$

$$-5|\chi| = 2 \Leftrightarrow |\chi| = -\frac{2}{5} \text{ αδύνατη}$$

$$7. |\chi + 1| - |\chi - 2| = 1$$

Λύση

x	-1	2
$x+1$	- ○ +	+
$x-2$	-	- ○ +

$$1^{\eta}) x \leq -1$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$-x - 1 + x - 2 = 1 \Leftrightarrow -3 = 1 \text{ αδύνατη}$$

$$2^{\eta}) -1 < x \leq 2$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x + 1 + x - 2 = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ δεκτή}$$

$$3^{\eta}) x > 2$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x + 1 - x + 2 = 1 \Leftrightarrow 3 = 1 \text{ αδύνατη}$$

Ε. Ανισώσεις με απόλυτη τιμή

Να λυθούν οι ανισώσεις:

1. $|-2\chi + 3| < 1$

Λύση

$$|-2\chi + 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < -2\chi + 3 < 1 \Leftrightarrow$$

$$-3 - 1 < -2\chi < -3 + 1 \Leftrightarrow -4 < -2\chi < -2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-4}{-2} > \chi > \frac{-2}{-2} \Leftrightarrow 2 > \chi > 1 \Leftrightarrow 1 < \chi < 2$$

2. $|\chi + 4| \geq 3$

Λύση

$$|\chi + 4| \geq 3 \Leftrightarrow \chi + 4 \leq -3 \text{ ή } \chi + 4 \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\chi \leq -7 \text{ ή } \chi \geq -1$$

3. $|-10x + 20| > 1$

Λύση

$$|-10x + 20| > 1 \Leftrightarrow$$

$$-10x + 20 < -1 \quad \text{ή} \quad -10x + 20 > 1 \Leftrightarrow$$

$$-10x < -21 \quad \text{ή} \quad -10x > -19 \Leftrightarrow$$

$$x > 2,1 \quad \text{ή} \quad x < 1,9$$

4. $|8x + 7| < -3$

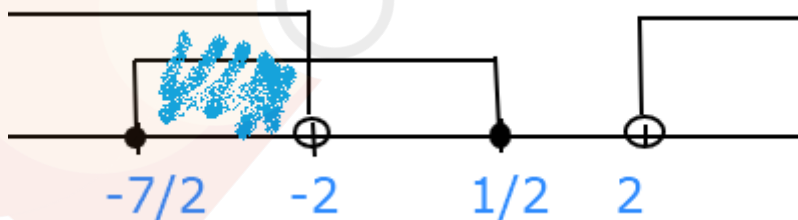
Λύση

Η απόλυτη είναι θετικός αριθμός άρα η ανίσωση είναι αδύνατη.

5. $2 < |4x + 6| \leq 8$

Λύση

$$\begin{cases} |4x + 6| > 2 \Leftrightarrow 4x + 6 < -2 \quad \text{ή} \quad 4x + 6 > 2 \Leftrightarrow x < -2 \quad \text{ή} \quad x > 2 \\ |4x + 6| \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq 4x + 6 \leq 8 \Leftrightarrow -14 \leq 4x \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Άρα, $x \in [-\frac{7}{2}, -2)$

$$6. \frac{|x-2|}{3} - 5 > \frac{-4|2-x|+2}{3}$$

Λύση

$$\frac{|x-2|}{3} - 5 > \frac{-4|2-x|+2}{3} \Leftrightarrow$$

$$|x-2| - 15 > -4|x-2| + 2 \Leftrightarrow$$

$$|x-2| + 4|x-2| > 15 + 2 \Leftrightarrow 5|x-2| > 17 \Leftrightarrow$$

$$|x-2| > \frac{17}{5} \Leftrightarrow x-2 < -\frac{17}{5} \text{ ή } x-2 > \frac{17}{5} \Leftrightarrow$$

$$x < -\frac{17}{5} + 2 \text{ ή } x > \frac{17}{5} + 2 \Leftrightarrow$$

$$x < -\frac{7}{5} \text{ ή } x > \frac{27}{5}$$