2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Α΄ Ομάδας

Άσκηση 2 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν

i) $f(x)=x|x|$, $x_0=0$ ii) $f(x)=|x-1|$, $x_0=1$

iii) $f(x)=|x^2-3x|$, $x_0=1$ iv) $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 &, x<0 \\ x+1 &, x\geq 0\end{cases}$, $x_0=0$.

Λύση

i) Α΄ τρόπος

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot x, & x\geq 0 \\ -x\cdot x, & x<0\end{cases}=\begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ -x^2, & x<0\end{cases}$$

Για $x>0$ *είναι* : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0$

Για $x<0$ *είναι* : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2)=0$

Επίσης : $f(0)=0$

Έτσι έχουμε : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο 0.

Για $x>0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2-0}{x}=\frac{x^2}{x}=x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

Για $x < 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-x^2-0}{x} = -\frac{x^2}{x} = -x$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$$

Οπότε :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

Β΄ τρόπος

Είναι : $f(0) = 0.$

Είναι : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{x} = \lim_{x\to 0}|x| = 0.$

ii) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x+1) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0$$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο 1.

Για $x > 1$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x-1-0}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$$

Για $x < 1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-x+1-0}{x-1} = -\frac{x-1}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (-1) = -1$$

Οπότε :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Άρα, δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

iii) Για το πρόσημο της $x^2 - 3x$ ισχύει :

	0		3	
+		-		+

Όπου 0, 3 είναι οι ρίζες της.

Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,3)$ έχουμε : $x^2 - 3x < 0$. Οπότε :

$$f(x) = -x^2 + 3x$$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-x^2+3x+2}{x-1}=\frac{-(x-1)(x-2)}{x-1}=-(x-2)$$

Οπότε :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}[-(x-2)]=-(1-2)=1$$

Επομένως, $f'(1)=1$.

iv) $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, x<0\\ x+1,\ x\geq 0\end{cases}$

Για $x<0$: $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to o^-}(x^2+x+1)=1$

Για $x>0$: $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to o^+}(x+1)=1$

$f(0)=0+1=1$

Οπότε : $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$

Η f είναι συνεχής στο 0.

Για $\boldsymbol{x<0}$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2+x+1-1}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}=x+1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=0+1=1$$

Για $\boldsymbol{x>0}$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x+1-1}{x}=\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

Επομένως : $f'(0)=1$.

Άσκηση 3 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Λύση

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$ σημαίνει ότι :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \qquad (1)$$

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\big(xf(x)-0f(0)\big)}{x} = \frac{xf(x)}{x} = f(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \qquad \textit{από τη σχέση } (1)$$

Οπότε, $\boldsymbol{g'(0) = f(0)}$.

Β΄ Ομάδας

Άσκηση 1 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=2-x+x\eta\mu|x|$ στο σημείο $x_0=0$.

Λύση

Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{2-x+x\eta\mu|x|-2}{x}=\frac{x(-1+\eta\mu|x|)}{x}=-1+\eta\mu|x|$$

Για $x>0$, $|x|=x$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1+\eta\mu x.$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}(-1+\eta\mu x)=-1$$

Για $x<0$, $|x|=-x$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1-\eta\mu x.$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}(-1-\eta\mu x)=-1$$

Οπότε : $f'(0)=-1.$

Άσκηση 2 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(1+h)=2+3h+3h^2+h^3$, για κάθε $h\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=2$ ii) $f'(1)=3$.

Λύση

α) Αφού η δοσμένη σχέση ισχύει για κάθε $h\in\mathbb{R}$ θα ισχύει και για

$h=0$.

Οπότε, για $h=0$ από τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$f(1+0)=f(1)=2+3\cdot 0+3\cdot 0^2+0^3=2$

β) Για κάθε $h\neq 0$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{2+3h+3h^2+h^3-2}{h}=$$

$$\frac{h(3+3h+h^2)}{h}=3+3h+h^2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3$$

Οπότε: $f'(1)=3$.

Άσκηση 3 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Αν $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & , \quad x<0 \\ \eta\mu x+1 & , \quad x\geq 0 \end{cases}$, να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(0,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

Λύση

Για $x<0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\dfrac{1}{1-x}-1}{x}=\frac{\dfrac{(1-1+x)}{1-x}}{x}=\frac{x}{x(1-x)}=\frac{1}{1-x}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

Για $x>0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\eta\mu x+1-1}{x}=\frac{\eta\mu x}{x}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

Άρα, $f'(0)=1$.

Άρα, ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0,1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(0)=1$, οπότε:

$$\varepsilon\varphi\omega=1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega=\frac{\pi}{4}$$

Άσκηση 4 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$ στο $x_0=0$.

Λύση

Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-0}{x}=\frac{\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}}{x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

Θα ήθελα να εμφανίσω στον αριθμητή $\eta\mu x$ και θυμάμαι ότι

$$1-\sigma\upsilon\nu^2 x=\eta\mu^2 x$$

Οπότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με το $1+\sigma\upsilon\nu x$ και έχουμε :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}=$$

$$\frac{\eta\mu^2 x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

Οπότε :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 5 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Αν $x+1 \le f(x) \le x^2+x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=1$

ii) $1 \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge x+1$, για $x<0$ και

$1 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x+1$, για $x>0$

iii) $f'(0)=1$.

Λύση

i) Η δοσμένη σχέση ισχύει $x \in \mathbb{R}$ ισχύει και για $x=0$. Οπότε :

$$(1+0) \le f(0) \le 0^2+0+1$$

$$1 \le f(0) \le 1$$

Άρα : $\boldsymbol{f(0)=1}$.

ii) Θέλουμε να εμφανίσουμε το $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)-1}{x}$

Οπότε, η δοσμένη σχέση γράφεται :

$$x \le f(x)-1 \le x^2+x$$

$$x \le f(x)-1 \le x(x+1) \qquad (1)$$

Πρέπει να διαιρέσω με το x αλλά δεν ξέρω αν είναι θετικό ή αρνητικό, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις.

Για $x>0$: $(1) \Rightarrow \dfrac{x}{x} \le \dfrac{f(x)-1}{x} \le \dfrac{x(x+1)}{x}$

$$1 \le \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le x+1 \qquad (2)$$

Για $x<0$: $(1) \Longrightarrow \dfrac{x}{x} \ge \dfrac{f(x)-1}{x} \ge \dfrac{x(x+1)}{x}$

$$1 \ge \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \ge x+1 \qquad (3)$$

iii) Για $x > 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1$

Από τη σχέση (2) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$$

Για $x < 0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} 1 = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1) = 1$

Από τη σχέση (3) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$$

Αφού λοιπόν είναι :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$$

συμπεραίνουμε ότι : $\boldsymbol{f'(0) = 1}$.

Άσκηση 6 σελ. 103 σχολικού βιβλίου

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\eta\mu^2 x - x^4 \leq x f(x) \leq \eta\mu^2 x + x^4$$

να αποδείξετε ότι

i) $f(0) = 0$ ii) $f'(0) = 1$.

Λύση

i) Η δοσμένη σχέση ισχύει και για $x = 0$. Οπότε βλέπουμε ότι $\eta\mu^2 0 - 0^4 \leq 0 \leq \eta\mu^2 0 + 0$ και δεν προκύπτει τίποτε. Πρέπει λοιπόν να σκεφτούμε αλλιώς.

Από την άσκηση λοιπόν βλέπουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

Επομένως: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$. **(1)**

Για να βρούμε το $f(0)$ πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια. Θα διαιρέσουμε αρχικά με x αλλά επειδή δεν ξέρουμε το πρόσημό του διακρίνουμε περιπτώσεις.

Για $x > 0$:

$$\frac{\eta\mu^2 x}{x} - \frac{x^4}{x} \leq f(x) \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x} + \frac{x^4}{x}$$

$$\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} - x^3 \leq f(x) \leq \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + x^3$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} - x^3\right) = \eta\mu 0 \cdot 1 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + x^3\right) = \eta\mu 0 \cdot 1 - 0 = 0$$

Από το κριτήριο παρεμβολής συνεπάγεται: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Επομένως, από τη σχέση (1) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{f(0) = 0}$.

ii) Για $x \neq 0$, πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια του :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$$

Διαιρούμε την αρχική σχέση με x^2 έτσι ώστε στη μέση να φύγει το x και να εμφανιστεί στον παρονομαστή το x.

Έχουμε :

$$\eta\mu^2 x - x^4 \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 x + x^4$$

$$\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}-\frac{x^4}{x^2} \leq \frac{xf(x)}{x^2} \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}+\frac{x^4}{x^2}$$

$$\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - x^2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + x^2$$

Είναι : $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - x^2\right] = 1-0=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + x^2\right] = 1+0=1$

Οπότε, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1 \Rightarrow \quad \boldsymbol{f'(0)=1}$$

Άσκηση 7 σελ. 103 σχολικού βιβλίου

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$ ii) $f'(0)=4$.

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

Επομένως : $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ **(1)**

Άρα, για να βρούμε το $f(0)$ αρκεί να βρούμε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Επομένως, $f(x) = g(x)\cdot x$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}[g(x)\cdot x] = 4\cdot 0 = 0$$

Οπότε : $(\mathbf{1}) \Rightarrow$ $\boldsymbol{f(0) = 0}$.

ii) Είναι :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 4$$

λόγω της υπόθεσης.

Άσκηση 8 σελ. 103 σχολικού βιβλίου

Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$

ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2f'(x_0)$.

Λύση

i) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_o)}{h} = -\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+(-h))-f(x_o)}{-h}$ (1)

Θέτουμε :

$$u = -h$$

Οπότε το παραπάνω όριο γίνεται :

$$(1) = -\lim_{u\to 0}\frac{f(x_o+u)-f(x_o)}{u} = -f'(x_o)$$

ii) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_{o-h})}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)+f(x_o)-f(x_o-h)}{h} =$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}\right] =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h} =$$

$$f'(x_o)-f'(x_o) = 2f'(x_o)$$