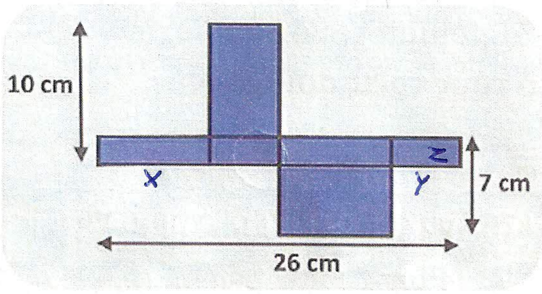
Επίπεδο 3

$10^{η}$ εβδομάδα

Επιλεγμένα θέματα διαγωνισμών Kangaroo

Ερώτηση 1

Το σχέδιο δείχνει το ανάπτυγμα ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, στο οποίο έχουν σημειωθεί ορισμένα μήκη του σχήματος. Πόσος είναι ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου;



A) 43 cm^3 B) 70 cm^3 Γ) 80 cm^3 Δ) 100 cm^3 Ε) 1820 cm^3

Λύση

Έστω x, y, z cm οι διαστάσεις.

Από το σχήμα έχουμε $2x + 2y = 26$, $x+z = 10$ και $y+z=7$.

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

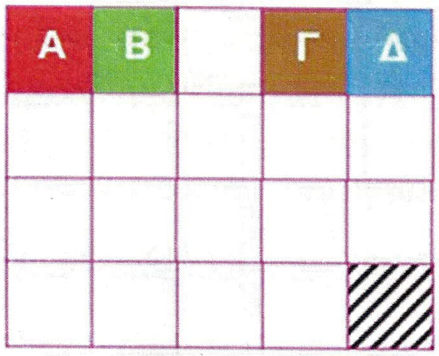
$$x+z+y+z = 10+7 \text{ ή } x+y+2z = 17$$

Αν πολ/σουμε με 2, έχουμε $2x+2y+4z = 34$. Συνεπώς $4z = 34-26 = 8$ οπότε $z=2$. Άρα $y+z=7 \Rightarrow y+2=7 \Rightarrow y=5$ και $x+2=10 \Rightarrow x=10-2 \Rightarrow x=8$.

Άρα ο όγκος είναι $8 \times 5 \times 2 = 80$ cm^3

Ερώτηση 2

Θέλουμε να βάψουμε τα τετραγωνάκια του διπλανού σχήματος χρησιμοποιώντας τέσσερα χρώματα Α, Β, Γ και Δ, έτσι ώστε γειτονικά τετραγωνάκια να έχουν διαφορετικό χρώμα. Γειτονικά θεωρούνται τα τετραγωνάκια πού έχουν είτε κοινή πλευρά είτε κοινή κορυφή. Μερικά τετραγωνάκια έχουν ήδη βαφτεί. Τι χρώμα μπορεί να έχει το σκιασμένο τετράγωνο κάτω δεξιά;



Α) Α Β) Β Γ) Γ Δ) Δ Ε) υπάρχουν δύο δυνατές επιλογές

Λύση

Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι κάθε τετραγωνάκι του παραπάνω σχήματος, έχει τα γειτονικά του τετραγωνάκια με διαφορετικό χρώμα.

Επομένως παρατηρώντας το παραπάνω σχήμα διαπιστώνουμε ότι το άσπρο τετραγωνάκι στην πρώτη σειρά μπορεί να έχει τα γράμματα Α ή Δ. Δεν μπορεί να έχει τα γράμματα Β και Γ διότι είναι τα γειτονικά του.

- Έστω ότι ξεκινάμε με το άσπρο τετραγωνάκι να έχει το γράμμα Α. Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Α	Β	Α	Γ	Δ

Εφόσον τα γειτονικά του γράμματος **Α** είναι τα γράμματα Β,Γ άρα το από **κάτω** κουτάκι του θα πρέπει να είναι το γράμμα **Δ.**

Α	Β	Α	Γ	Δ
		Δ		

Αριστερά από το κουτάκι Δ θα βάλουμε το γράμμα Γ διότι έχει γειτονικά τετραγωνάκια Α, Β.

Α	Β	Α	Γ	Δ
Δ	Γ	Δ		

Αριστερά από το κουτάκι Γ θα βάλουμε το γράμμα Δ διότι έχει γειτονικά τετραγωνάκια τα Α, Β.

Δεξιά από το κουτάκι Δ θα βάλουμε το γράμμα Β διότι έχει γειτονικά τετραγωνάκια Α και Γ.

Α	Β	Α	Γ	Δ
Δ	Γ	Δ	Β	

Δεξιά από το κουτάκι Β θα βάλουμε το γράμμα Α διότι έχει γειτονικά τετραγωνάκια Γ και Δ.

Α	Β	Α	Γ	Δ
Δ	Γ	Δ	Β	Α

Αν παρατηρήσουμε τώρα λίγο παραπάνω τον πίνακα μας βλέπουμε ότι η 1η γραμμή μπορεί να έχει τον ίδιο σχηματισμό γραμμάτων καις την 3η γραμμή και η 2η γραμμή μπορεί να έχει τον ίδιο σχηματισμό γραμμάτων στην 4η γραμμή.

Άρα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Α	**Β**	**Α**	**Γ**	**Δ**
Δ	**Γ**	**Δ**	**Β**	**Α**
Α	**Β**	**Α**	**Γ**	**Δ**
Δ	**Γ**	**Δ**	**Β**	**Α**

Επομένως το μαύρο κουτάκι έχει το γράμμα **Α.**

Έστω ότι ξεκινάμε με άσπρο το άσπρο κουτάκι να έχει το γράμμα Δ.

Α	**Β**	**Δ**	**Γ**	**Δ**

- Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Α	Β	Δ	Γ	Δ
Δ	Γ	Α	Β	Α
Α	Β	Δ	Γ	Δ
Δ	Γ	Α	Β	Α

Παρατηρούμε ότι, είτε ξεκινήσουμε με το γράμμα Α, είτε ξεκινήσουμε με το γράμμα Δ , το μαύρο κουτάκια θα έχει το γράμμα Α.

Σωστή Απάντηση: Α

Ερώτηση 3

Το άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι 3^{2018}. Ποιος είναι ο μεσαίος από τους τρεις αριθμούς;

Α) $3^{2017}-1$ Β) 3^{2017} Γ) $3^{2017}+1$ Δ) $3^{2018}-1$

Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Λύση

Οι τρείς ζητούμενοι αριθμοί είναι: $3^{2017}-1$, 3^{2017}, $3^{2017}+1$.
Οπότε το άθροισμα τους είναι:

$$3^{2017}\cancel{-1}+3^{2017}+3^{2017}\cancel{+1}=3\cdot 3^{2017}=3^{2017+1}=3^{2018}$$

Άρα ο μεσαίος από τους τρείς αριθμούς είναι 3^{2017}.

Ερώτηση 4

Η Κοκκινοσκουφίτσα είχε ένα καλάθι με μπισκότα. Έδωσε τα μισά μπισκότα στον λύκο, μετά έδωσε 10 μπισκότα στην Γιαγιά της, από τα υπόλοιπα έδωσε τα μισά στην αλεπού και μετά έδωσε 10 μπισκότα στον Παππού της. Τώρα δεν έμεινε κανένα μπισκότο στο καλάθι. Πόσα μπισκότα είχε στην αρχή;

Α) 72 Β) 68 Γ) 64 Δ) 60 Ε) 56

Λύση

Ξεκινάμε απο το τέλος και πάμε προς την αρχή.
Αφού δεν έμεινε κανένα μπισκότο όταν η Κοκκινοσκουφίτσα έδωσε 10 μπισκότα στον Παππού της, σημαίνει ότι είχε 10 μπισκότα πριν τα δώσει.
Αφού έμειναν 10 μπισκότα αφού έδωσε τα μισά στην αλεπού, σημαίνει ότι είχε 20 μπισκότα πρίν τα δώσει. Ομοια είχε 30 μπισκότα πριν δώσει τα 10 στη Γιαγιά και άρα 60 πριν δώσει τα μισά στο λύκο.

Ερώτηση 5

Ο Ευκλείδης έχει μία συλλογή από τρίγωνα και από τετράγωνα. Όλες μαζί οι πλευρές τους είναι 41. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός από τρίγωνα που μπορεί να έχει η συλλογή του;

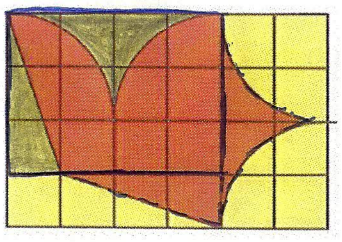
Α) 1 Β) 2 Γ) 3 Δ) 7

Ε) κανένα από τα προηγούμενα

- Αν έχει 10 τετράγωνα, τότε δεν μπορεί να έχει κανένα τρίγωνο ($10 \times 4 = 40$ πλευρές)
- Αν έχει 9 τετράγωνα, τότε μπορεί να έχει ένα τρίγωνο. Τότε όμως θα είχε ($9 \times 4 + 1 \times 3 = 36 + 3 \Rightarrow 39$ πλευρές οπότε θα περίσσευαν 2 πλευρές.
- Αν έχει 8 τετράγωνα, τότε μπορεί να έχει τρία τρίγωνα. Οπότε θα έχει $8 \times 4 + 3 \times 3 = 32 + 9 = 41$ πλευρές.

Ερώτηση 6

Ένα δίχρωμο σημαιάκι έχει χωριστεί σε ίσα τετράγωνα. Στο εσωτερικό του υπάρχει ένα κόκκινο σχέδιο του οποίου η εξωτερική γραμμή αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα και από τόξα κύκλων, όπως στην εικόνα. Αν το σημαιάκι έχει εμβαδόν 24 cm^2, πόσο είναι το εμβαδόν του κόκκινου σχεδίου;



Α) 10 cm^2 Β) 11 cm^2 Γ) 12 cm^2 Δ) 13 cm^2 Ε) 14 cm^2

Το σημαιάκι έχει εμβαδόν 24 cm^2, οπότε αφού αποτελείται από 24 τετράγωνα κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 cm^2.

Αν πάρουμε (όπως στο σχήμα) τα τόξα κύκλων και τα τρίγωνα και τα τοποθετήσουμε κατάλληλα, θα δούμε ότι η κόκκινη περιοχή αποτελείται τελικά από 12 κόκκινα τετράγωνα. Κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 cm^2 οπότε το εμβαδόν του κόκκινου σχεδίου είναι 12 cm^2.

Ερώτηση 7

Έχουμε τέσσερις θετικούς αριθμούς μ, ν, M, N με $0 < \mu < \nu$ και $0 < M < N$. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι ο μικρότερος;

Α) $\frac{\mu}{M}$ Β) $\frac{\mu}{N}$ Γ) $\frac{\nu}{M}$ Δ) $\frac{\nu}{N}$

Ε) Εξαρτάται από τους αριθμούς

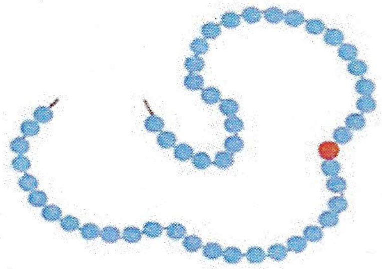
Γνωρίζουμε ότι όσο μεγαλώνει ο αριθμητής ενός κλάσματος, τόσο μεγαλώνει το κλάσμα. Επίσης όσο μικραίνει ο παρονομαστής, τότε το κλάσμα μεγαλώνει.
Ξέρουμε ότι $0<\mu<\nu$ και $0<M<N$, οπότε:

$$\frac{\mu}{N} < \frac{\mu}{M} < \frac{\nu}{M} \quad \text{και} \quad \frac{\mu}{N} < \frac{\nu}{N}$$

Συνεπώς το κλάσμα $\frac{\mu}{N}$ είναι μικρότερο από τα άλλα 3 κλάσματα.

Ερώτηση 8

Σε ένα κολιέ υπάρχουν 49 μπλε χάντρες και μία κόκκινη. Πόσες χάντρες πρέπει να αφαιρέσουμε αν θέλουμε ένα κολιέ όπου οι μπλε χάντρες να είναι το 90% από τις χάντρες του;



Α) 4 Β) 10 Γ) 29 Δ) 39 Ε) 40

Το υπόλοιπο 10 % είναι η μία χάντρα. Για να είναι το 10 % μια χάντρα, όλες οι χάντρες είναι 10.
Άρα το καινούργιο κολιέ έχει 1 κόκκινη και 9 μπλέ χάντρες
Αρχικά είχε 49 μπλέ χάντρες, οπότε βγάλαμε $49 - 9 = 40$ μπλέ χάντρες.

Ερώτηση 9

Σε ένα τσίρκο υπάρχουν τρεις πόρτες. Πίσω από την μία από τις πόρτες υπάρχει ένα λιοντάρι.

Ένα σημείωμα στην 1η πόρτα γράφει: Το λιοντάρι είναι πίσω από αυτή την πόρτα.

Ένα σημείωμα στην 2η πόρτα γράφει: Το λιοντάρι ***δεν*** είναι πίσω από αυτή την πόρτα.

Ένα σημείωμα στην 3η πόρτα γράφει: $2 + 3 = 2 \times 3$.

Εάν μόνο ένα από τα τρία σημειώματα λέει την αλήθεια, που βρίσκεται το λιοντάρι;

Α) πίσω από την πόρτα 1

Β) πίσω από την πόρτα 2

Γ) πίσω από την πόρτα 3

Δ) μπορεί να είναι πίσω από οποιαδήποτε πόρτα

Ε) μπορεί να είναι πίσω είτε από την πόρτα 1 είτε την 2

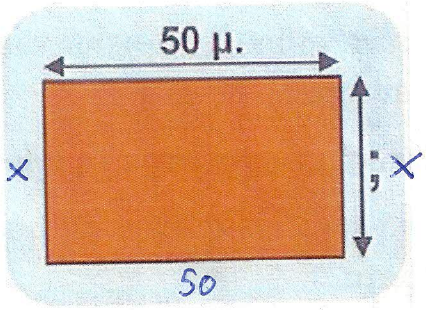
Λύση

Θεωρούμε 3 πιθανές θέσεις για το λιοντάρι:

- Αν το λιοντάρι ήταν πίσω από την πόρτα 1, τα σημειώματα στην 1η πόρτα και 2η πόρτα θα έγραφαν αλήθεια. Άρα το λιοντάρι δεν είναι πίσω από την πόρτα 1.
- Αν το λιοντάρι ήταν πίσω από την πόρτα 2, τα σημειώματα σε όλες τις πόρτες θα ήταν ψευδή. Άρα το λιοντάρι δεν είναι πίσω από την πόρτα 2.
- Αν το λιοντάρι ήταν πίσω από την πόρτα 3, τα σημειώματα στην 1η και 3η πόρτα θα ήταν ψευδή, αλλά το σημείωμα στην πόρτα 2 θα ήταν αληθές. Άρα το λιοντάρι βρίσκεται πίσω από την πόρτα 3.

Ερώτηση 10

Ο Αχιλλέας και η χελώνα έτρεξαν έναν αγώνα δρόμου γύρω από ένα ορθογώνιο οικόπεδο που η μία του πλευρά είναι 50 μ. Η ταχύτητα του Αχιλλέα είναι 9 φορές η ταχύτητα της χελώνας. Όσο να τρέξει η χελώνα 50 μ., ο Αχιλλέας έκανε τρεις ολόκληρους γύρους γύρω από το οικόπεδο. Πόσα μέτρα είναι η άλλη πλευρά του οικοπέδου;



Α) 15μ. Β) 20 μ. Γ) 25μ. Δ) 30 μ. Ε) 40 μ.

Λύση

Συμβολίζουμε με x την άγνωστη πλευρά. Η περίμετρος του οικοπέδου είναι τότε $50 + x + 50 + x = 100 + 2x$ μ.

Ο Αχιλλέας έκανε 3 γύρους γύρω από το οικόπεδο οπότε έκανε απόσταση $3\cdot(100+2x) = 300 + 6x$ μ. Η χελώνα, όσο ο Αχιλλέας έκανε αυτή την απόσταση, έκανε 50 μ.

Η ταχύτητα του Αχιλλέα είναι 9 φορές η ταχύτητα της χελώνας οπότε έχουμε την εξίσωση

$$\frac{6x+300}{9} = 50 \Rightarrow 6x+300 = 450 \Rightarrow 6x = 150 \Rightarrow x = \frac{150}{6} = 25 \text{ μ.}$$

Ερώτηση 11

Σχηματίζουμε όλους τους τριψήφιους αριθμούς που το άθροισμα των ψηφίων τους είναι 8. Από αυτούς διαλέγουμε τον πιο μεγάλο και τον πιο μικρό. Πόσο είναι το άθροισμα αυτών των δύο;

Α) 727 Β) 907 Γ) 916 Δ) 1000 Ε) 1001

Λύση

Οι τριψήφιοι αριθμοί που έχουν άθροισμα ψηφίων ίσο με 8 είναι:

116 125 134 143 152 161
215 224 233 242 251
314 323 332 341
413 422 431
512 521
611

Άρα το άθροισμα του πιο μικρού και του πιο μεγάλου αριθμού είναι:

$116 + 611 = 727$.

Ερώτηση 12

Έχουμε 9 πακέτα με 555 καρφίτσες το καθένα. Αν θέλουμε όλες αυτές τις καρφίτσες να τις χωρίσουμε σε 5 ίδια μεταξύ τους πακέτα, πόσες καρφίτσες θα έχει το κάθε πακέτο;

Α) 999 Β) 900 Γ) 555 Δ) 111 Ε) 45

Λύση

Τα 9 πακέτα έχουν $9 \times 555 = 4995$ καρφίτσες.

Αν θέλουμε να χωρίσουμε τις καρφίτσες σε 5 ίδια πακέτα, τότε το κάθε πακέτο θα περιέχει $4995 : 5 = 999$ καρφίτσες.

Ερώτηση 13

Σε ένα νησί ζουν συνολικά 2017 ζώα. Κάποια από αυτά είναι καγκουρό ενώ τα υπόλοιπα είναι δράκοι. Τα καγκουρό λένε πάντα την αλήθεια και οι δράκοι λένε πάντα ψέματα. Μια μέρα έκατσαν πάνω από 1000 ζώα σε ένα στρογγυλό τραπέζι από τα οποία τουλάχιστον το ένα ήταν καγκουρό. Το καθένα στο τραπέζι είπε την φράση ***«από τα δύο ζώα που κάθονται δίπλα μου, το ένα είναι καγκουρό και το άλλο δράκος»***. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός από καγκουρό που μπορεί να ζουν στο νησί (είτε βρίσκονταν στο τραπέζι είτε όχι);

Α) 1683 Β) 668 Γ) 670 Δ) 1344 Ε) 1343

Λύση

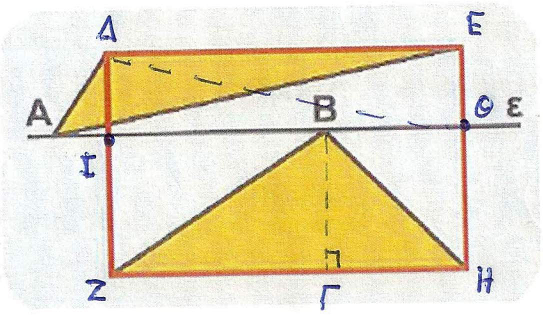
Συμβολίζουμε με Κ το καγκουρό και Δ τον δράκο.

Αφού από τα δύο ζώα που κάθονται δίπλα μου, το ένα είναι καγκουρό και το άλλο δράκος, αυτό σημαίνει ότι έχουμε 3 ζώα στη σειρά του τύπου ΔΚΚ ή ΚΚΔ. Η διάταξη θα είναι όπως στο σχήμα:

(μέχρι να κλείσει ο κύκλος)

Στο τραπέζι κάθονται ένα πλήθος ζώων που είναι πολ/σιο του 3 και από αυτά κάθε 2 στα 3 είναι καγκουρό.

Ερώτηση 14



Το σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και μία ευθεία ε παράλληλη προς την βάση. Δύο σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω στην ε, όπως δείχνει το σχήμα. Το άθροισμα των εμβαδών των δύο γραμμοσκιασμένων τριγώνων είναι 10 cm^2. Πόσο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου;

Α) 18 cm^2 Β) 20 cm^2 Γ) 22 cm^2 Δ) 24 cm^2

Ε) εξαρτάται από τις θέσεις των Α και Β

Λύση

Φέρνουμε το ύψος ΒΓ, όπως στο σχήμα. Τότε παρατηρούμε ότι η διαγώνιος ΒΗ του τετραγώνου ΒΘΗΓ χωρίζει το τετράγωνο ΒΘΗΓ σε δύο ίσα κομμάτια. Το ίδιο συμβαίνει και με το ορθογώνιο ΑΒΓΖ.

Τώρα στο ορθογώνιο ΔΕΘΙ αν μετακινούσαμε το Α πάνω στην ευθεία και το φέρναμε στη θέση του Θ, θα παρατηρούσαμε ότι η διαγώνιος ΔΘ θα χώριζε το ΔΕΘΙ σε δύο ίσα κομμάτια. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα λευκά κομμάτια στο ορθογώνιο ΔΕΗΖ έχουν το ίδιο εμβαδό με τα κίτρινα κομμάτια.

Ερώτηση 15

Στον πίνακα είναι γραμμένοι επτά διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Το άθροισμα των τριών μικρότερων είναι 33. Πόσο είναι το άθροισμα των τριών μεγαλύτερων;

Α) 31 Β) 37 Γ) 42 Δ) 48 Ε) 45

Λύση

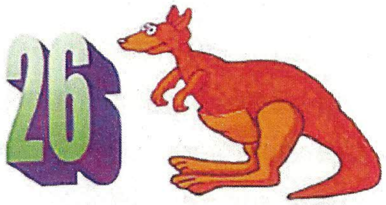
Οι επτά διαδοχικοί αριθμοί είναι: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

Το άθροισμα των 3 μικρότερων είναι $10+11+12=33$

Το άθροισμα των 3 μεγαλύτερων είναι $14+15+16=45$.

Ερώτηση 16

Ένα Καγκουρό ήθελε να προσθέσει 26 σε κάποιον αριθμό. Όμως έκανε λάθος και αντί να προσθέσει, αφαίρεσε 26. Αν βρήκε −14 πόσο θα έβρισκε αν έκανε σωστά την πράξη;



Α) 28 Β) 32 Γ) 36 Δ) 38 Ε) 42

Λύση

Αφού αντί να προσθέσει 26, το αφαίρεσε, αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός που βρήκε είναι κατά $26+26=52$ μικρότερος από το σωστό αποτέλεσμα. Συνεπώς το σωστό αποτέλεσμα είναι $52-14=38$.

Ερώτηση 17

Ο Αρχιμήδης θέλει να αφιερώσει δύο ολόκληρες μέρες από τις επόμενες 7 για να μελετήσει Μαθηματικά. Όμως ***δεν θέλει οι δύο αυτές μέρες να είναι συνεχόμενες***. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει τις δύο μέρες που θα μελετήσει Μαθηματικά κατά τις επόμενες 7 μέρες;

Α) 15 Β) 14 Γ) 12 Δ) 10 Ε) 8

Λύση

Είναι $5+4+3+2+1=15$.

- Αν η πρώτη μέρα μελέτης είναι την Δευτέρα τότε έχει 5 επιλογές για τη δεύτερη μέρα μελέτης (Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατο, Κυριακή)
- Αν η πρώτη μέρα μελέτης είναι την Τρίτη τότε έχει 4 επιλογές για τη δεύτερη μέρα μελέτης (Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατο, Κυριακή)
- Αν η πρώτη μέρα μελέτης είναι την Τετάρτη τότε έχει 3 επιλογές για τη δεύτερη μέρα μελέτης.
- Αν η πρώτη μέρα μελέτης είναι η Πέμπτη έχει 2 και αν είναι Παρασκευή 1.

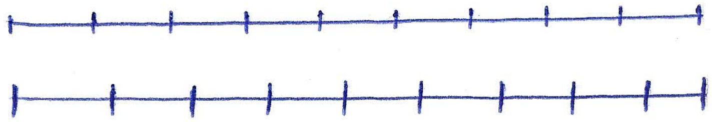
Ερώτηση 18

Ο κ. Γόρδιος ήθελε να κόψει ένα κομμάτι σπάγκου σε 9 ίσα μέρη, γι' αυτό σημείωσε πάνω στον σπάγκο τα σημεία κοπής. Η κα. Ρωξάνη ήθελε να ήθελε να κόψει το ίδιο κομμάτι σπάγκου σε 8 ίσα μέρη, οπότε σημείωσε και αυτή πάνω στον ίδιο σπάγκο τα δικά της σημεία κοπής. Τελικά τον σπάγκο τον έκοψε ο κ. Αλέξανδρος. Για να τον κόψει χρησιμοποίησε όλα τα σημειωμένα σημεία. Πόσα κομμάτια σπάγκου πήρε ο κ. Αλέξανδρος;

Α) 15 Β) 16 Γ) 17 Δ) 18 Ε) 19

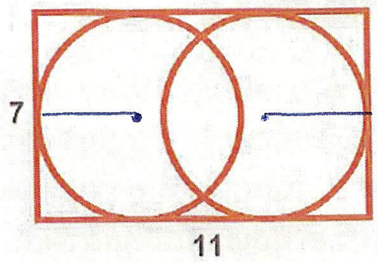
Λύση

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι ο σπάγκος έχει μήκος 72 μονάδες οπότε ο κ. Γόρδιος σημείωσε τα σημεία σε απόσταση 8, 16, 24, 32, 40 48, 56, 64 μονάδες· από το ένα άκρο και η κα. Ρωξάνη σε απόσταση 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63. Παρατηρούμε ότι τα σημεία κοπής δεν συμπίπτουν. Αφού τα σημειωμένα σημεία είναι 15, ο Αλέξανδρος θα πάρει 16 κομμάτια σπάγκου.



Ερώτηση 19

Το σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων 7x11. Μέσα στο ορθογώνιο βρίσκονται δύο κύκλοι που ο καθένας εφάπτεται σε τρεις πλευρές του ορθογωνίου. Πόση είναι η απόσταση των κέντρων των κύκλων;



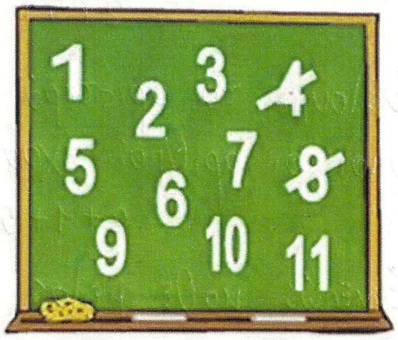
Α) 1 Β) 2 Γ) 3 Δ) 4 Ε) 5

Λύση

Από το σχήμα, μπορούμε να δούμε ότι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων είναι 11 cm − 2x την ακτίνα του κύκλου ή ισοδύναμα 11 cm − τη διάμετρο κάθε κύκλου. Αφού η διάμετρος είναι 7 cm, η απόσταση μεταξύ των κέντρων είναι 11 cm − 7 cm = 4 cm.

Ερώτηση 20

Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι το 10. Ένας μαθητής έσβησε δύο αριθμούς και αμέσως μετά έγραψε στον πίνακα το άθροισμα τους μειωμένο κατά 1. (π.χ. αν είχε σβήσει τους 4 και 8, θα έγραφε τον 11). Μετά ένας άλλος μαθητής έσβησε δύο από τους αριθμούς που άφησε στον πίνακα ο πρώτος, και έγραψε το άθροισμά τους μειωμένο κατά 1. Η διαδικασία αυτή συνεχίστηκε μέχρι που στο τέλος έμεινε στον πίνακα μόνο ένας αριθμός. Ποιος είναι ο αριθμός που έμεινε;



Α) κάποιος αριθμός μικρότερος του 11   Β) 11   Γ) 46

Δ) κάποιος αριθμός μεγαλύτερος του 46   Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Λύση

Κάθε φορά που σβήνουμε δύο αριθμούς απο τον πίνακα και γράφουμε έναν το πλήθος των αριθμών στον πίνακα μειώνεται κατά 1 κάθε φορά.

Αφού στο τέλος έμεινε ένας αριθμός, η διαδικασία κρατάει 9 γύρους.

Σε κάθε γύρο, το άθροισμα όλων των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα μειώνεται κατά 1.

π.χ Αν σβήσουμε τους 4,8 και στη θέση τους γράψουμε το 11, το άθροισμα μειώθηκε κατά $(4+8)-11=1$.

Άρα μετά από 9 γύρους, θα έχουμε: $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)-9=46$.

Συνεπώς ότι και να κάνουμε, θα έχουμε πάντα 46.

Ερώτηση 21

Κάθε αστερίσκος (*) στην διπλανή ισότητα πρέπει να αντικατασταθεί είτε με ένα + ή με ένα – ώστε να γίνει σωστή η ισότητα. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός από * που πρέπει αντικατασταθούν με +;

2 * 1 * 5 * 2 * 1 * 5 * 2 * 1 * 5 = 0

Α) 1   Β) 2   Γ) 3   Δ) 4   Ε) 5

Λύση

Μια κατάλληλη λύση είναι η:

$$2-1+5-2-1+5-2-1-5=0$$

Αν πάμε τους όρους με τα −, στο άλλο μέλος, θα έχουμε:

$$2+5+5=1+2+1+2+1+5$$

Θέλουμε το αριστερό μέλος να έχει όσο λιγότερους όρους γίνεται
Όλοι οι αριθμοί έχουν άθροισμα:

$$2+1+5+2+1+5+2+1+5=24$$

Συνεπώς κάθε μέλος πρέπει να έχει άθροισμα $24:2=12$.
Το 12, το γράφουμε ως $2+5+5$, οπότε το άλλο μέλος γράφεται ως $1+2+1+2+1+5$

Άρα ο μικρότερος αριθμός απο + είναι δύο.