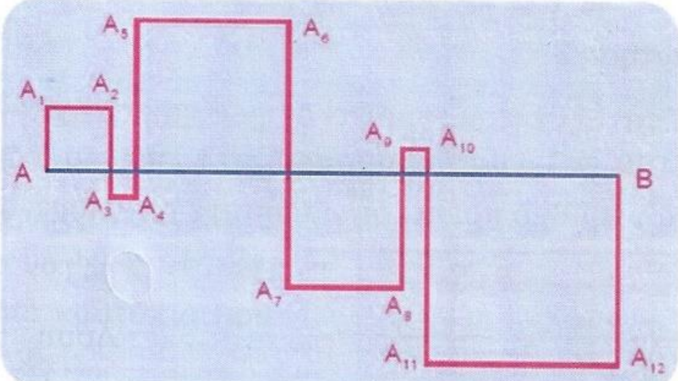
Επίπεδο 3

9η εβδομάδα

Επιλεγμένα θέματα διαγωνισμών Kangaroo

Ερώτηση 1

Σχηματίζουμε τετράγωνα των οποίων η μία πλευρά είναι πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Έτσι σχηματίζεται μία τεθλασμένη γραμμή $AA_1A_2....A_{12}B$ (βλέπε σχήμα). Αν το ΑΒ έχει μήκος 24 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος της τεθλασμένης γραμμής $AA_1A_2....A_{12}B$;



Α) 48 εκατ. Β) 72 εκατ. Γ) 96 εκατ. Δ) 56 εκατ. Ε) 106 εκατ.

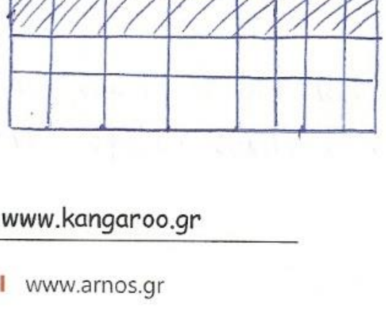
Λύση

Η κόκκινη γραμμή πάνω στο σχήμα αποτελείται από 3 πλευρές από καθένα από τα τετράγωνα, οπότε το μήκος της θα είναι το $\frac{3}{4}$ του συνολικού αθροίσματος των περιμέτρων τους.
Από την άλλη, η ΑΒ αποτελείται από μια πλευρά κάθε τετραγώνου, οπότε το μήκος της ΑΒ είναι το $\frac{1}{4}$ του συνολικού αθροίσματος των περιμέτρων τους.
Άρα το μήκος της τεθλασμένης γραμμής είναι $3\cdot(AB) = 3\cdot 24 = 72$ εκατ.

Ερώτηση 2

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι χωρισμένο σε 40 ολόιδια τετράγωνα. Το σχήμα έχει περισσότερες από μία γραμμές από τετράγωνα. Ένας ζωγράφος έβαψε με πράσινο χρώμα την μεσαία γραμμή των τετραγώνων. Πόσα τετράγωνα άφησε άβαφα;

Α) 20 Β) 30 Γ) 32 Δ) 35 Ε) 39



Λύση

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο θα έχει μήκος 8 τετράγωνα και πλάτος 5 τετράγωνα ώστε να έχουμε $5\times 8 = 40$ τετράγωνα.

Αν χρωματίσουμε τη μεσαία γραμμή, θα έχουμε χρωματίσει 8 τετράγωνα. Άρα τα τετράγωνα που έμειναν άβαφα είναι $40-8=32$.

Ερώτηση 3

Η Υπατία θέλει να γράψει στην πίνακα μερικούς πρώτους αριθμούς από το 2 μέχρι το 100. Θέλει να χρησιμοποιήσει τα ψηφία 1, 2, 3, 4 και 5 από μία φορά το καθένα. Ποιον αριθμό πρέπει οπωσδήποτε να γράψει στον πίνακα;

Α) 2 Β) 5 Γ) 31 Δ) 41 Ε) 53

Λύση

Αν η Υπατία γράψει οπωσδήποτε στον πίνακα τον αριθμό 41, τότε θα μπορεί να γράψει και τους πρώτους αριθμούς 2, 53 ή 5, 23.
Με τις υπόλοιπες επιλογές που δίνονται, δεν θα μπορούσε να φτιάξει πρώτους αριθμούς.
Για παράδειγμα, αν έγραφε οπωσδήποτε το 2, τότε θα έφτιαχνε τους αριθμούς 2, 31, 45 ή 2, 13, 54 ή 2, 41, 35 κ.ο.κ.

Ερώτηση 4

Ο Νίκος και ο Μιχάλης μάζευαν καρύδια κάθε μέρα για επτά συνεχόμενες μέρες, αρχίζοντας από μία Δευτέρα. Την Δευτέρα αυτή μάζεψαν τον ίδιο αριθμό από καρύδια. Κάθε επόμενη μέρα ο Νίκος μάζευε 40 καρύδια περισσότερα από αυτά που είχε μαζέψει την προηγούμενη, ενώ ο Μιχάλης μάζευε τα διπλάσια από αυτά που είχε μαζέψει την προηγούμενη. Στο τέλος της έβδομης μέρας είχαν μαζέψει συνολικά τον ίδιο αριθμό από καρύδια. Πόσα καρύδια μάζεψε ο καθένας τη Δευτέρα;

Α) 3 Β) 5 Γ) 7 Δ) 10

Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Λύση

Έστω ότι ο Νίκος και ο Μιχάλης μάζεψαν από x καρύδια τη Δευτέρα. Τότε:
- Ο Νίκος μάζεψε συνολικά:

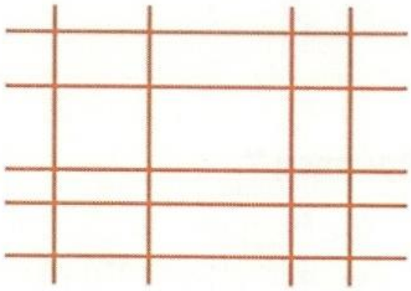
$x+(x+40)+(x+80)+(x+120)+(x+160)+(x+200)+(x+240)$
$=7x+40(1+2+3+4+5+6)=7x+40\cdot 21=7x+840$ καρύδια

• Ο Μιχάλης μάζεψε συνολικά
$x+2x+4x+8x+16x+32x+64x=x(1+2+4+8+16+32+64)=127x$ καρύδια

Το πρόβλημα δίνει ότι $7x+840=127x$. Λύνουμε την εξίσωση οπότε έχουμε:
$120x=840 \Rightarrow x=7$.

Ερώτηση 5

Ζωγραφίζοντας 9 ευθείες (5 οριζόντιες και 4 κάθετες) μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σχήμα με 12 κουτάκια. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει 6 οριζόντιες και 3 κάθετες ευθείες, θα κατασκευάζαμε μόνο 10 κουτάκια. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός από κουτάκια που μπορούμε να κατασκευάσουμε με 15 ευθείες;



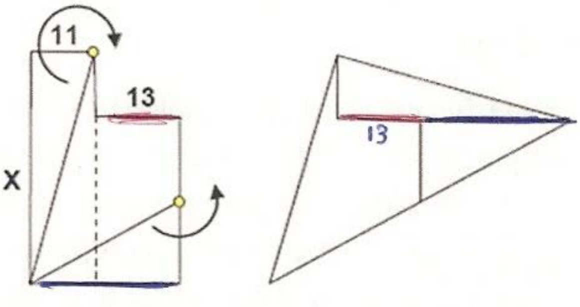
Α) 22 Β) 30 Γ) 36 Δ) 40 Ε) 42

Λύση

Είναι εύκολο να δούμε ότι για ένα σύνολο γραμμών, ο μεγαλύτερος αριθμός από κουτάκια προκύπτει όταν οι οριζόντιες και οι κάθετες γραμμές είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά.
Αν ο συνολικός αριθμός γραμμών είναι 15, οι γραμμές 7 και 8 είναι ένα τέτοιο ζευγάρι. Τότε το σχέδιο μας θα έχει 6 γραμμές και 7 στήλες (ή 7 γραμμές και 6 στήλες) οπότε τα κουτάκια είναι $6\cdot 7=42$.

Ερώτηση 6

Το σχήμα δίπλα αποτελείται από δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Το μήκος δύο πλευρών του είναι 11 και 13, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Κόβουμε τώρα το παραλληλόγραμμο σε τρία μέρη και με τα κομμάτια φτιάχνουμε το τρίγωνο της εικόνας. Πόσο είναι το μήκος Χ;



Α) 36 Β) 37 Γ) 38 Δ) 39 Ε) 40

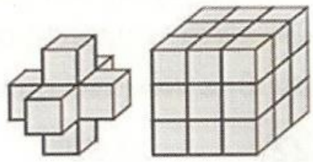
Λύση

Κοιτάζοντας στο σχήμα παρατηρούμε ότι το μπλε κομμάτι ισούται με $11+13=24$
Το κόκκινο κομμάτι είναι 13. Άρα το μήκος Χ ισούται με:

$$X = 13 + 24 = 37.$$

Ερώτηση 7

Η αριστερή εικόνα είναι μία κατασκευή που αποτελείται από 7 όμοιους κύβους. Πόσους τέτοιους κύβους χρειαζόμαστε να συμπληρώσουμε στην κατασκευή ώστε να φτιάξουμε τον μεγάλο κύβο στην δεξιά εικόνα;



Α) 12 Β) 14 Γ) 16 Δ) 18 Ε) 20

Λύση

Για να φτιάξουμε έναν κύβο με 3 κύβους στην άκρη, χρειαζόμαστε $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ κύβους. Στην εικόνα έχουν χρησιμοποιηθεί 7 μικροί κύβοι
Άρα ο αριθμός των κύβων που απαιτούνται είναι $27-7=20$.

Ερώτηση 8

Στον πίνακα είναι γραμμένοι αριθμοί αρχίζοντας από τους 6, 8, 8, 4, 2 και λοιπά. Ο άνθρωπος που τους έγραψε, ακολούθησε τον εξής κανόνα: Πρώτα έγραψε τους 6 και 8. Ο κάθε επόμενος είναι το ψηφίο των μονάδων στο γινόμενο των δύο προηγούμενων του αριθμών. Για παράδειγμα ο τρίτος είναι ο 8 διότι 6x8=18, και το ψηφίο των μονάδων είναι 8. Ποιο ψηφίο βρίσκεται στην 2017η θέση;

Α) 2 Β) 3 Γ) 4 Δ) 6 Ε) 8

Λύση

Βρίσκουμε τον τέταρτο αριθμό. Επειδή το γινόμενο των δύο προηγούμενων του δηλαδή των 8 και 8, είναι $8\times8=64$, και το ψηφίο των μονάδων του 64 είναι 4. Άρα ο τέταρτος αριθμός είναι το 4

Βρίσκουμε τον πέμπτο αριθμό. Είναι $8\times4=32$ και αφού το ψηφίο των μονάδων είναι 2, ο πέμπτος αριθμός είναι ο 2.

Με παρόμοιο τρόπο ο έκτος αριθμός είναι ο 8 διότι $4\times2=8$

Αν προχωρήσουμε θα δούμε ότι οι επόμενοι είναι οι 6 και 8, δηλαδή ίδιοι με τους δύο αρχικούς. Άρα: 6,8,8,4,2,8 6,8,8,4,2,8 6,8,8,4,2,8. Αφού $2016=6\times336$ μετά από 336 επαναλήψεις, ο επόμενος θα είναι ο 6

Ερώτηση 9

Ένας ποδηλάτης κινείται με ταχύτητα 5 μέτρων ανά δευτερόλεπτο. Καθεμία από τις ρόδες του έχει περίμετρο 125 εκατοστά του μέτρου. Πόσες πλήρεις περιστροφές θα κάνει κάθε ρόδα σε 5 δευτερόλεπτα;

Α) 4 Β) 5 Γ) 10 Δ) 20 Ε) 25

Λύση

Σε 5 δευτερόλεπτα ο ποδηλάτης θα διανύσει $5\cdot5=25$ μέτρα, που είναι 2500 εκατοστά του μέτρου. Αφού η ρόδα έχει περίμετρο 125 εκατοστά θα κάνει $2500:125=20$ περιστροφές

Ερώτηση 10

Βάφουμε όλους τους θετικούς ακέραιους 1, 2, 3, ... σύμφωνα με τους εξής κανόνες:

(α) κάθε αριθμός βάφεται είτε κόκκινο είτε πράσινο χρώμα,

(β) το άθροισμα δύο διαφορετικών κόκκινων αριθμών είναι κόκκινος αριθμός,

(γ) το άθροισμα δύο διαφορετικών πράσινων αριθμών είναι πράσινος αριθμός.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει τέτοια βαφή;

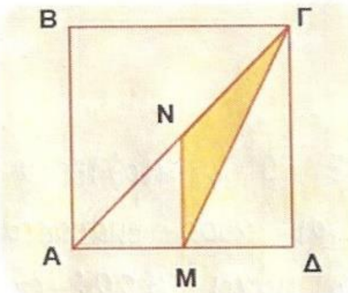
Α) 0 Β) 2 Γ) 4 Δ) 6 Ε) περισσότερους από 6

Λύση

Γενικά ισχύει ότι:
Αν ο αριθμός 1 είναι κόκκινος και αν κάποιος αριθμός Ν είναι και αυτός κόκκινος, τότε όλοι οι αριθμοί από τον Ν και πέρα θα είναι κόκκινοι.
Το ίδιο ισχύει και για τους πράσινους.
Τότε οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούμε να έχουμε είναι:

Δηλαδή συνολικά 6 περιπτώσεις.

Ερώτηση 11



Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά με μήκος 4 μέτρα. Το Μ είναι το μέσον του ΑΔ και το Ν είναι το μέσο του ΑΓ. Πόσο είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΓΜΝ;

Α) 1 τ.μ. Β) 1,5 τ.μ. Γ) 2 τ.μ. Δ) 2,5 τ.μ.

Ε) κανένα από τα προηγούμενα

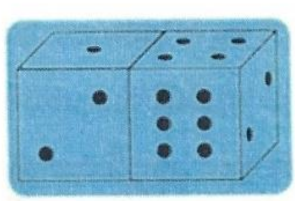
Λύση

Τα τρίγωνα ΜΝΓ και ΜΝΑ έχουν ίδιο εμβαδόν γιατί η διάμεσος ΜΝ του τριγώνου ΜΑΓ το χωρίζει σε δύο μέρη με ίδια εμβαδά (τα τρίγωνα αυτά έχουν ίσες βάσεις, ΑΝ = ΝΓ και κοινό ύψος από το Μ στη βάση ΑΓ)

Άρα $\text{Εμβαδόν}_{ΜΓΝ} = \dfrac{\text{Εμβαδόν}_{ΜΓΑ}}{2}$. Όμως $\text{Εμβαδόν}_{ΜΓΑ} = \dfrac{1}{2} ΑΜ \cdot ΓΔ = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$

Άρα $\text{Εμβαδόν}_{ΜΓΝ} = \dfrac{4}{2} = 2$ τ.μ.

Ερώτηση 12



Ποιο είναι το άθροισμα των αριθμών σε όλες τις έδρες που δεν φαίνονται στην διπλανή εικόνα δύο ζαριών;

Α) 15 Β) 12 Γ) 7 Δ) 27

Ε) άλλη απάντηση

Λύση

1ος τρόπος: Στο δεξί ζάρι, οι αριθμοί στις έδρες που δεν φαίνονται είναι 1, 3 και 5. Στο αριστερό ζάρι, οι αριθμοί στην πλευρά που δεν φαίνονται είναι 5, 6, 4 και 3. Το άθροισμα είναι: $1+3+5+5+6+4+3=27$.

2ος τρόπος: Το συνολικό άθροισμα όλων των σημείων και στα 2 ζάρια είναι $7\times3\times2=42$. Το άθροισμα που βλέπουμε είναι $1+2+2+4+6=15$ οπότε το άθροισμα που δεν φαίνεται είναι $42-15=27$.

Ερώτηση 13

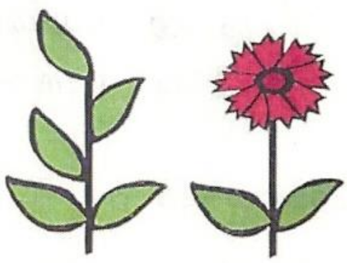
Η Σοφία έγραψε στον πίνακα έναν τριψήφιο φυσικό αριθμό. Μετά έσβησε ένα από τα ψηφία του τριψήφιου, οπότε παρέμεινε ένας διψήφιος. Το άθροισμα του διψήφιου που παρέμεινε και του αρχικού τριψήφιου ήταν 771. Πόσο είναι το άθροισμα των ψηφίων του αρχικού τριψήφιου;

Α) 8　　Β) 17　　Γ) 19　　Δ) 20　　Ε) 23

Λύση

Έστω xyz ο αριθμός. Θα σβήσουμε το τελευταίο ψηφίο γιατί αν στον διψήφιο μείνει το z δεν γίνεται να έχουμε $z+z=1$.
Άρα θα σβήσουμε το z και το y που θα μας κάνει 0 γιατί δεν πρέπει να έχουμε κρατούμενο. Άρα και ο τριψήφιος είναι ο 701 αφού $x=7$.

Ερώτηση 14



Σε μία γλάστρα υπάρχουν 10 φυτά. Κάθε φυτό έχει είτε

α) 5 φύλλα είτε β) 2 φύλλα και 1 λουλούδι. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς θα μπορούσε να είναι ο συνολικός αριθμός των φύλλων στην γλάστρα;

Α) 45　　Β) 39　　Γ) 37　　Δ) 31

Ε) καμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις δεν είναι δυνατή

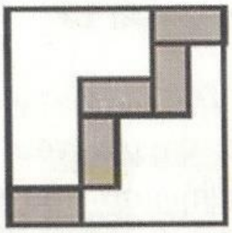
Λύση

Αν στη γλάστρα και τα 10 φυτά είχαν 5 φύλλα τότε ο συνολικός αριθμός των φύλλων θα ήταν $5\cdot10=50$. Αν αντικαταστήσουμε ένα από αυτά τα φυτά με ένα του τύπου 2 φύλλα και 1 λουλούδι, τότε τα φύλλα μειώνονται κατά 3. Άρα τα φύλλα είναι $50-3=47$. Κάθε φορά που αντικαθιστούμε με φυτό

του τύπου β.) 2 φύλλα και 1 λουλούδι, τα φύλλα θα μειώνονται κατά 3
Άρα για τα 10 φυτά της γλάστρας οι πιθανές τιμές είναι:
$50-3=47$, $47-3=44$, $44-3=41$, $41-3=38$, $38-3=35$, $35-3=32$, $32-3=29$
$29-3=26$ και $26-3=23$. Άρα καμία απάντηση δεν ταιριάζει.

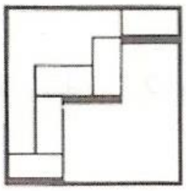
Ερώτηση 15

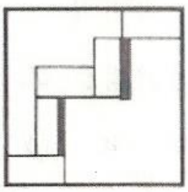
Πέντε ίσα μεταξύ τους ορθογώνια παραλληλόγραμμα (γκρι στο σχήμα) είναι τοποθετημένα μέσα σε ένα τετράγωνο πλευράς 24 cm, όπως δείχνει το διάγραμμα. Πόσο είναι το εμβαδόν του κάθε ορθογωνίου παραλληλογράμμου;



Α) 12 cm² Β) 16 cm² Γ) 18 cm² Δ) 24 cm² Ε) 32 cm²

Λύση





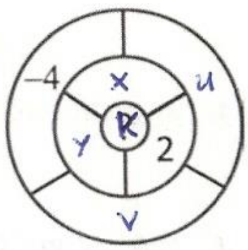
Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε ότι το μήκος ενός ορθογωνίου είναι
24 cm : 3 = 8 cm

Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε ότι το πλάτος του ορθογωνίου είναι
(24 cm − 2·8 cm) : 2 = 4 cm.

Άρα το εμβαδόν του κάθε ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι
$8\ cm \cdot 4\ cm = 32\ cm^2$.

Ερώτηση 16

Η Ρία θέλει να γράψει έναν αριθμό σε καθεμία από τις 7 περιοχές του διαγράμματος. Δύο περιοχές είναι γειτονικές εάν μοιράζονται ένα μέρος των ορίων τους. Ο αριθμός σε κάθε περιοχή είναι το άθροισμα των αριθμών σε όλες τις γειτονικές του περιοχές. Η Ρία έχει γράψει ήδη δύο από τους αριθμούς όπως φαίνεται στο σχήμα δεξιά. Ποιον αριθμό πρέπει να γράψει στην κεντρική περιοχή;



Α) 1 Β) −2 Γ) 6 Δ) −4 Ε) 0

Λύση

Ας συμβολίσουμε με κ τον άγνωστο αριθμό. Τότε αυτός θα ισούται με το άθροισμα των αριθμών στις γειτονικές περιοχές. Δηλαδή $κ = x+y+2$

Ας πάρουμε τον αριθμό 2. Με το ίδιο σκεπτικό αυτός θα ισούται με:

$$2 = x+y+u+v+κ = (x+y+u+v)+(x+y+2)$$

Για τον -4 ισχύει: $-4 = x+y+u+v$ οπότε από την προηγούμενη σχέση έχουμε: $2 = -4 + (x+y+2)$, δηλαδή $x+y+2 = 4+2 \Rightarrow x+y+2 = 6 \Rightarrow κ = 6$.

Άρα ο άγνωστος αριθμός είναι ο 6.

Ερώτηση 17

Ο Γιάννης έγραψε μεγάλους αριθμούς μόνο με 9-ρια. Με πόσο ισούται το άθροισμα;

$$\underbrace{999\ldots999}_{150 \text{ ψηφία}} + \underbrace{999\ldots999}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{999\ldots999}_{50 \text{ ψηφία}}$$

Α) $\underbrace{100\ldots001}_{51 \text{ ψηφία}}\underbrace{000\ldots000}_{50 \text{ ψηφία}}\underbrace{999\ldots997}_{50 \text{ ψηφία}}$

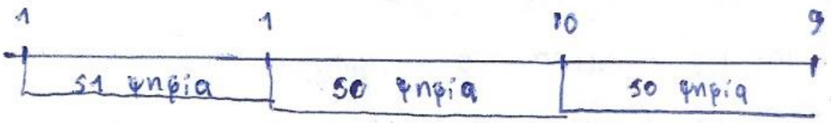
Β) $\underbrace{999\ldots999}_{300 \text{ ψηφία}}$

Γ) $\underbrace{999\ldots999}_{50 \text{ ψηφία}}\underbrace{888\ldots888}_{50 \text{ ψηφία}}\underbrace{777\ldots777}_{50 \text{ ψηφία}}$

Δ) $\underbrace{100\ldots000}_{51 \text{ ψηφία}}\underbrace{999\ldots998}_{50 \text{ ψηφία}}\underbrace{999\ldots997}_{50 \text{ ψηφία}}$

Ε) άλλη απάντηση

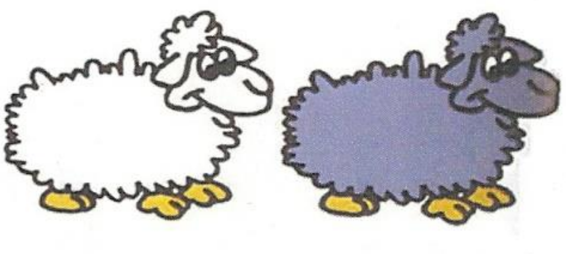
Λύση



Το τελευταίο ψηφίο του αθροίσματος θα είναι 7, αφού έχουμε $9+9+9=27$ οπότε γράφουμε 7 και έχουμε κρατούμενο το 2. Έπειτα, κάθε φορά θα έχουμε άθροισμα 27 και 2 το κρατούμενο, 29. Άρα κάθε φορά γράφουμε 9 και κρατούμε 2, μέχρι να έχουμε άθροισμα 10, οπότε γράφουμε 0 και κρατούμε το 1. Το πρώτο ψηφίο του αθροίσματος θα είναι το 1.

Ερώτηση 18

Σε ένα κοπάδι το 60% των προβάτων έχει άσπρο χρώμα ενώ το 12% έχει μαύρο. Αν το κοπάδι έχει 45 άσπρα πρόβατα, πόσα μαύρα πρόβατα έχει το κοπάδι;



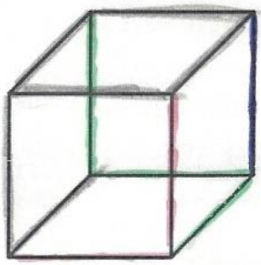
Α) 4 Β) 6 Γ) 9 Δ) 10 Ε) 12

Λύση

Αφού το 60 % του κοπαδιού είναι 45 πρόβατα, όλο το κοπάδι έχει $(45 \cdot 100) : 60 = 75$ πρόβατα. Το 12 % του 75 είναι $\frac{12}{100} \cdot 75 = 9$.

Ερώτηση 19

Ο Γιάννης έχει 7 κομμάτια σύρματος με μήκη 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm και 7 cm. Χρησιμοποιεί κάποια κομμάτια για να φτιάξει έναν κύβο με ακμές μήκους 1 cm χωρίς καθόλου προεξοχές. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός τέτοιων κομματιών που μπορεί να χρησιμοποιήσει;



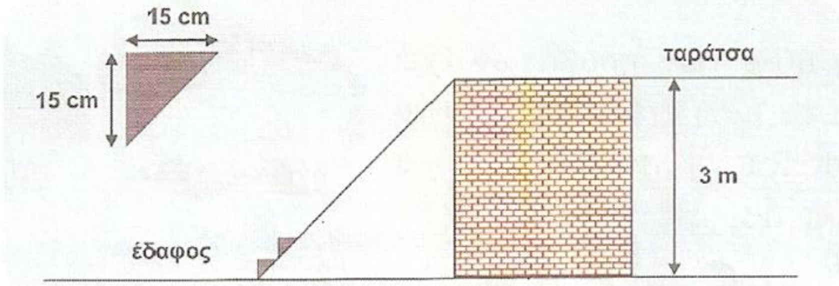
Α) 1 Β) 2 Γ) 3 Δ) 4 Ε) 5

Λύση

Θα χρειαστεί κομμάτια σύρματος με μήκη 1 cm, 2 cm, 3 cm και 6 cm.
Το σύρμα μήκους 1 cm είναι με μπλε στο σχήμα.
Το σύρμα μήκους 2 cm είναι με κόκκινο στο σχήμα.
Το σύρμα μήκους 3 cm είναι με πράσινο στο σχήμα.
Το σύρμα μήκους 6 cm είναι με γκρί στο σχήμα.

Ερώτηση 20

Ο μάστορας θέλει να κτίσει μία σκάλα για να ανεβαίνει κανείς στην ταράτσα του εικονιζόμενου κτιρίου, το οποίο έχει ύψος 3 m. Θέλει το κάθε σκαλοπάτι να έχει ύψος 15 cm και πλάτος 15 cm. Πόσα σκαλοπάτια πρέπει να έχει η σκάλα;



Α) 8 Β) 10 Γ) 15 Δ) 20 Ε) 25

Λύση

Το μήκος της σκάλας θα ισούται με το άθροισμα των υψών όλων των σκαλοπατιών. Δηλαδή $15+15+\ldots+15$ cm.

Γνωρίζουμε ότι 3 m = 300 cm. Αν υποθέσουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός σκαλοπατιών είναι x τότε έχουμε την εξίσωση:

$$15x=300$$
$$x=\frac{300}{15}$$
$$x=20.$$

Άρα η σκάλα θα πρέπει να έχει 20 σκαλοπάτια.

Ερώτηση 21

Δύο κομμάτια από σπάγκο έχουν μήκος 1 μ. και 2 μ., αντίστοιχα. Ο κύριος Ψαλίδας τα έκοψε σε μικρότερα κομμάτια που όλα είχαν το ίδιο μήκος μεταξύ τους. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς αποκλείεται να είναι το συνολικό πλήθος των κομματιών μετά το κόψιμο;

Α) 6 Β) 8 Γ) 9 Δ) 12 Ε) 15

Λύση

Αν ο κύριος Ψαλίδας έκοψε τον μικρό σπάγκο σε N κομμάτια, τότε υποχρεωτικά έκοψε τον μεγάλο σπάγκο σε $2\cdot N$ κομμάτια (αφού είναι διπλάσιος).

Το συνολικό πλήθος κομματιών είναι $N+2N=3N$, δηλαδή πολλαπλάσιο του 3.

Άρα ο κύριος Ψαλίδας αποκλείεται να έκοψε τους 2 σπάγκους σε συνολικά 8 κομμάτια.

Από τους υπόλοιπους αριθμούς όλοι είναι πιθανοί, αφού

$6=2+4$, $9=3+6$, $12=4+8$ και $15=5+10$.