

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

Α΄ Θέμα

1. Να υπολογίσετε το εξαγόμενο $\sqrt{1 + \sqrt{9}} - 1 - \sqrt{9}$.

Μονάδες 7

2. Αν $x = -\frac{1}{2}$ και $y = -\frac{3}{2}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^4 + y^4 - 2x^2y^2$.

Μονάδες 8

Λύση

$$1. \sqrt{1 + \sqrt{9}} - 1 - \sqrt{9} = \sqrt{1 + 3} - 1 - 3 = \sqrt{4} - 4 = 2 - 4 = -2$$

$$2. x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 = \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 - \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right]^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{9}{4} \right)^2 = \left(-\frac{8}{4} \right)^2 = (-2)^2 = 4$$

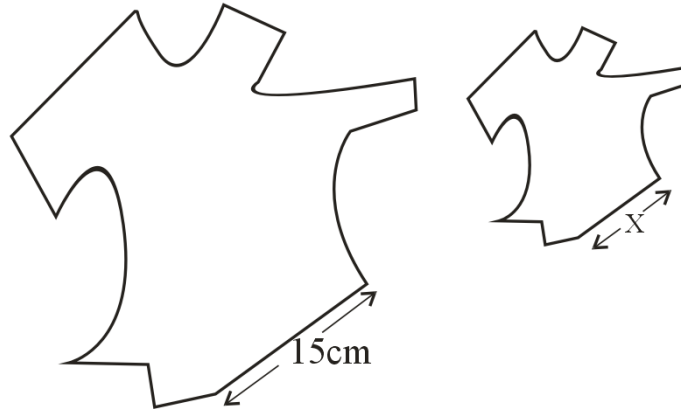
Εναλλακτικά

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^4 + \left(-\frac{3}{2} \right)^4 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \left(-\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{81}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{82}{16} - \frac{18}{16} = \frac{64}{16} = 4$$

ΤΕΛΟΣ 1^{ης} ΣΕΛΙΔΑΣ

Β' Θέμα

1. Στα δύο παρακάτω σχήματα το μικρό είναι σμίκρυνση του μεγάλου με κλίμακα 1:3



Να υπολογίσετε το μήκος X της πλευράς του μικρού σχήματος.

Μονάδες 7

Λύση

Αφού η κλίμακα είναι 1:3 τότε το μήκος X είναι το $\frac{1}{3}$ του μήκους 15cm.

$$\text{Άρα } X = 15 : 3 = 5\text{cm}$$

ΑΡΧΗ 3^{ης} ΣΕΛΙΔΑΣ

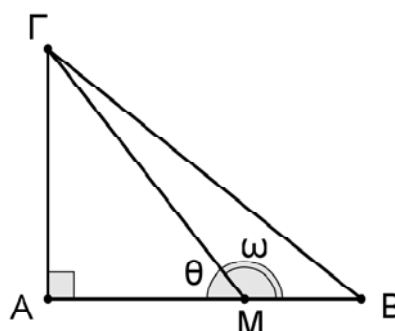
2. Το τρίγωνο ABΓ του σχήματος είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές AB = 5cm και AΓ = 4cm. Αν MB = 2cm να βρείτε:

α) την εφθ

Μονάδες 5

β) την εφω

Μονάδες 3



Λύση

α) $AM = AB - MB = 5 - 2 = 3$

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{A\Gamma}{AM} = \frac{4}{3}$$

β) Οι γωνίες ω και θ είναι παραπληρωματικές

$$\text{Άρα } \varepsilon\phi\omega = -\varepsilon\phi\theta = -\frac{4}{3}$$

Γ' Θέμα

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το O και οι ευθείες (ε₁) και (ε₂) με εξισώσεις

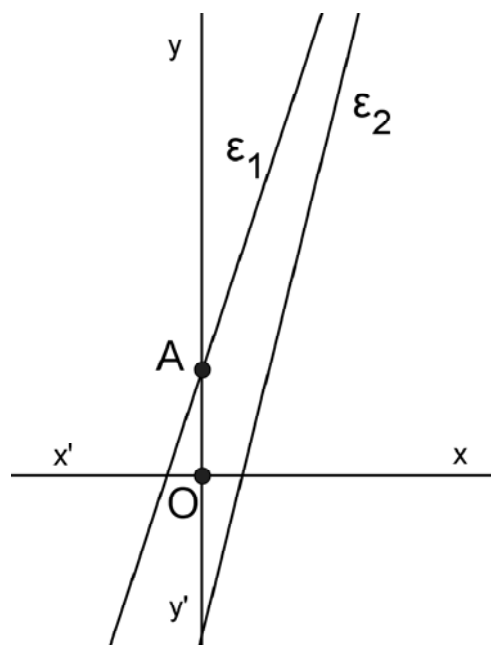
$$\varepsilon_1 : y = 3x + 2 \text{ και } \varepsilon_2 : y = 4x - 3.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A.

Μονάδες 4

β) Να εξετάσετε αν κάποια από τις δυο ευθείες διέρχεται από το σημείο M(2,5).

Μονάδες 6



γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε₁) και (ε₂).

Μονάδες 5

Λύση

α) Το σημείο A που η ευθεία $\epsilon_1 : y = 3x + 2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ έχει συντεταγμένες $A(0,\beta)$ όπου $\beta = 2$.

Άρα $A(0,2)$

β) Για $x = 2$ η (ϵ_1) γίνεται $y = 3 \cdot 2 + 2 = 8 \neq 5$ άρα δε διέρχεται από το M

Για $x = 2$ η (ϵ_2) γίνεται $y = 4 \cdot 2 - 3 = 5$ άρα διέρχεται από το M

γ) Η συντεταγμένες του σημείου τομής είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$$

Τότε

$$4x - 3 = 3x + 2$$

$$x = 5$$

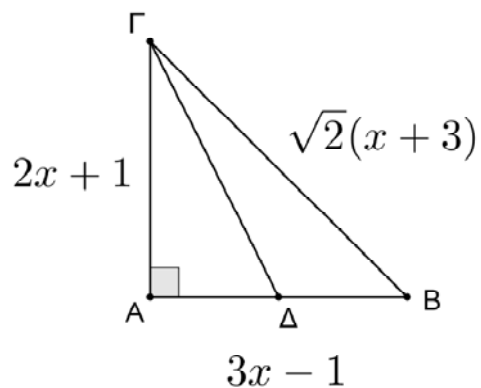
Επίσης $y = 3 \cdot 5 + 2 = 17$. Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι $\Sigma(5,17)$.

Δ' Θέμα

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, τα μήκη των πλευρών του σε cm είναι:

$AB = 3x - 1$, $AG = 2x + 1$ και

$B\Gamma = \sqrt{2}(x + 3)$, όπου το x είναι ένας πραγματικός αριθμός.



α) Να αποδείξετε ότι για τον αριθμό x ισχύει $11x^2 - 14x - 16 = 0$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τα μήκη των AB και AG.

Μονάδες 6

γ) Αν Δ είναι το μέσον της AB, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου BΓΔ.

Μονάδες 4

Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει

$$(2x + 1)^2 + (3x - 1)^2 = [\sqrt{2}(x + 3)]^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 + 9x^2 - 6x + 1 = 2(x^2 + 6x + 9)$$

$$11x^2 - 14x - 16 = 0$$

β) Βρίσκουμε το x επιλύοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$11x^2 - 14x - 16 = 0 \text{ όπου}$$

$$\Delta = 900$$

$$x_1 = 2, x_2 = -\frac{8}{11}$$

Για $x_1 = 2$ έχουμε $AB = 2 \cdot 2 + 1 = 5\text{cm}$ και $AG = 3 \cdot 2 - 1 = 5\text{cm}$

Για $x_2 = -\frac{8}{11}$ έχουμε $A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2} = 2,5\text{cm}$ με $AG = 3 \cdot \left(-\frac{8}{11}\right) - 1 < 0$

απορρίπτεται

γ) $A\Delta = \frac{AB}{2} = 2,5\text{cm}$

$$E = \frac{A\Delta \cdot AG}{2} = \frac{2,5 \cdot 5}{2} = 6,25\text{cm}^2$$

Εναλλακτικά

$$A\Delta = \frac{AB}{2} = 2,5\text{cm}$$

$$(B\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) - (A\Gamma\Delta) = \frac{AB \cdot AG}{2} - \frac{A\Delta \cdot AG}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{2,5 \cdot 5}{2} = 6,25\text{cm}^2$$