

Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

ΦΥΛΛΟ ΘΕΜΑΤΩΝ Α: Live διδασκαλία

Ασκήσεις

Θέμα 1

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;
3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$, S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

Θέμα 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός α , που ικανοποιεί τη σχέση:

$$|\alpha - 2| < 1.$$

1. Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α .
2. Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2 - (a - 2)x + \frac{1}{4}$.
 - a. Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.
 - b. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$x^2 - (a - 2)x + \frac{1}{4} > 0.$$

Θέμα 3

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.
2. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

3. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.
4. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(x) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 4

Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

1. Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda.$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.