ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

37η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020

Θέματα μικρών τάξεων
Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1.

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την ανίσωση:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}.$$

Λύση

Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}\Leftrightarrow \frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}+\frac{x}{16}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(x+2)^4-8(x+2)^2x^2+x^4}{16x^3}\geq 0\Leftrightarrow \frac{\left(4(x+2)^2-x^2\right)^2}{16x^3}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4(x+2)^2-x^2\right)^2\geq 0,\ x\neq 0\Leftrightarrow x\geq 0,\ x\neq 0 \text{ ή } 4(x+2)^2-x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } (2x+4+x)(2x+4-x)=0\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } (3x+4)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } x=-\frac{4}{3} \text{ ή } x=-4.$$

Διαφορετικά μπορούμε για $x\neq 0$ να εργαστούμε ως εξής:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}\Leftrightarrow \frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}+\frac{x}{16}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\left[\frac{(x+2)^4}{x^4}-\frac{(x+2)^2}{2x^2}+\frac{1}{16}\right]\geq 0\Leftrightarrow x\left[\left(\frac{x+2}{x}\right)^2-\frac{1}{4}\right]^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } \frac{x+2}{x}=\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } x=-\frac{4}{3} \text{ ή } x=-4$$

Πρόβλημα 2.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma$. Έστω Δ το μέσον της πλευράς ΒΓ και ΒΕ, ΓΖ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Η ευθεία ΖΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Θ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Delta E$ συναρτήσει της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.
(β) Να βρείτε τη γωνία $B\hat{\Theta}Z$ συναρτήσει των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ορθογώνιο και η ΖΔ είναι η διάμεσος του προς την υποτείνουσα, οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $Z\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = B\Delta$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 = B\hat{\Delta}Z = 180^0 - 2\hat{B} \qquad (1)$$

Με το ίδιο σκεπτικό έχουμε $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \Gamma\Delta$ και από το ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ βρίσκουμε και την ισότητα

$$\hat{\Delta}_2 = \Gamma\hat{\Delta}E = 180^0 - 2\hat{\Gamma} \qquad (2)$$

Άρα είναι

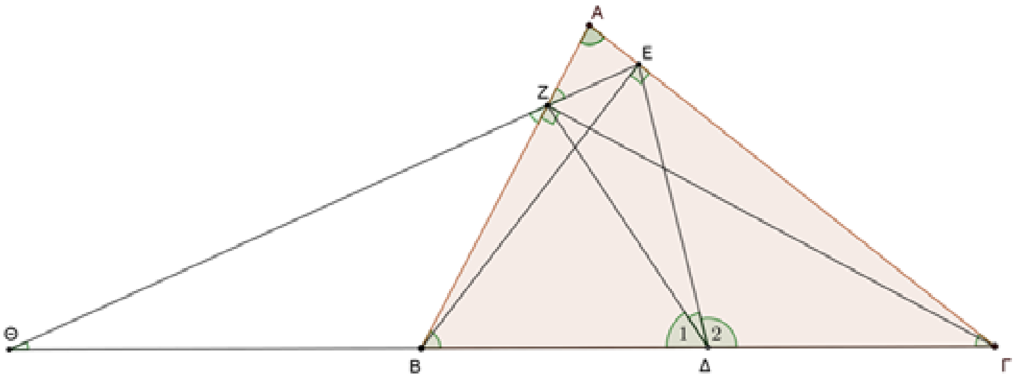
$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \left(180^0 - 2\hat{B}\right) + \left(180^0 - 2\hat{\Gamma}\right) = 360^0 - 2\left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right) = 360^0 - 2\left(180^0 - \hat{A}\right) = 2\hat{A} \ ,$$

οπότε

$$Z\hat{\Delta}E = 180^0 - \left(\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2\right) = 180^0 - 2\hat{A}.$$

Επιπλέον, επειδή το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές (αφού $\Delta Z = \Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$), έχουμε:

$$\Delta\hat{Z}E = \Delta\hat{E}Z = \frac{180 - (180^0 - 2\hat{A})}{2} = \hat{A}.$$



Σχήμα 1

(β) Από το τρίγωνο ΒΘΖ και τη σχέση μιας εξωτερικής γωνίας με τις απέναντι εσωτερικές έχουμε

$$\hat{B} = B\hat{\Theta}Z + B\hat{Z}\Theta. \qquad (3)$$

Όμως είναι

$$B\hat{Z}\Theta = A\hat{Z}E \qquad (4)$$

ως κατά κορυφή, ενώ από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΖΕΓ (αφού $B\hat{Z}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 90^0$) έχουμε

$$A\hat{Z}E = \hat{\Gamma} \ . \qquad (5)$$

Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις λαμβάνουμε:

$$B\hat{\Theta}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}\ .$$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α, β, γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\alpha + \beta + \gamma = \nu\alpha\beta\gamma\,. \qquad \text{(E)}$$

Για τις τιμές του ν που θα βρείτε, να προσδιορίσετε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (E).

Λύση

Επειδή η εξίσωση είναι συμμετρική ως προς α, β, γ θα βρούμε ασχοληθούμε με την περίπτωση που ισχύει $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Τότε έχουμε:

$$\alpha \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 3\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq \nu\alpha\beta\gamma \leq 3\alpha \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} 1 \leq \nu\beta\gamma \leq 3\,.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\nu > 3$. Τότε $\nu\beta\gamma > 3$, άτοπο.
- $\nu = 3$. Τότε $1 \leq 3\beta\gamma \leq 3 \Rightarrow \beta\gamma = 1 \Rightarrow \beta = \gamma = 1$, οπότε $\alpha + 2 = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$.
  Άρα έχουμε τη λύση $(\alpha, \beta, \gamma) = (1,1,1)$.
- $\nu = 2$. Τότε $1 \leq 2\beta\gamma \leq 3 \Rightarrow \beta\gamma = 1 \Rightarrow \beta = \gamma = 1$, οπότε $\alpha + 2 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$.
  Άρα έχουμε τη λύση $(\alpha, \beta, \gamma) = (2,1,1)$ και λόγω συμμετρίας τις λύσεις
  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1,2,1)$ και $(\alpha, \beta, \gamma) = (1,1,2)$.
- $\nu = 1$. Τότε $1 \leq \beta\gamma \leq 3 \Rightarrow \beta\gamma \in \{1,2,3\}$.
  Αν $\beta\gamma = 1$, τότε $\beta = \gamma = 1$ και $\alpha + 2 = 1$, αδύνατη.
  Αν $\beta\gamma = 2$, τότε $\beta = 2$, $\gamma = 1$ και $\alpha + 3 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 3$.
  Επομένως, $(\alpha, \beta, \gamma) = (3,2,1)$ και λόγω συμμετρίας λύσεις είναι και οι τριάδες:
  $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,1,3), (\alpha,\beta,\gamma)=(3,2,1), (\alpha,\beta,\gamma)=(3,1,2), (\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,3), (\alpha,\beta,\gamma)=(2,3,1)$.
  Αν $\beta\gamma = 3$, τότε $\beta = 3$, $\gamma = 1$ και $\alpha + 4 = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$. (απορρίπτεται, γιατί $\alpha < \beta$).

Επομένως οι τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α, β, γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha + \beta + \gamma = \nu\alpha\beta\gamma$ είναι: $\nu = 1$ ή 2 ή 3.

Πρόβλημα 4

Γράφουμε 99 κύκλους σε μία σειρά και στο εσωτερικό τους γράφουμε τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 99:

Χρωματίζουμε καθέναν από τους κύκλους με ένα από τα δύο χρώματα που διαθέτουμε: το κόκκινο (Κ) και το πράσινο (Π). Λέμε ότι ένας χρωματισμός είναι «*καλός*», αν έχει την ιδιότητα:

Οι κόκκινοι κύκλοι στο τμήμα των αριθμών από το 1 μέχρι και το 50 είναι περισσότεροι από τους κόκκινους κύκλους στο τμήμα των αριθμών από το 51 μέχρι και το 99.

(α) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.
(β) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί «*καλοί*» χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.
(Σημείωση: Δύο χρωματισμοί είναι διαφορετικοί, αν έχουν διαφορετικό χρώμα σε έναν τουλάχιστον κύκλο).

Λύση

(α) Κάθε κύκλος μπορεί να χρωματιστεί με 2 διαφορετικά χρώματα, ανεξάρτητα από το χρωματισμό των υπολοίπων κύκλων. Επομένως σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή οι διαφορετικοί χρωματισμοί που μπορούν να κατασκευαστούν είναι:

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2 \ldots \cdot 2}_{99-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} = 2^{99}.$$

(β) Θεωρούμε ένα χρωματισμό $X : \underbrace{1\ 2\ 3 \ldots\ldots 50}_{x-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51 \ldots\ldots 98\ 99}_{y-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}$. Ο χρωματισμός Χ είναι «*καλός*», αν $x > y$, ενώ ο χρωματισμός Χ είναι *όχι καλός*, αν $x \le y$.

Έστω Α το σύνολο των «καλών» χρωματισμών και Β το σύνολο των όχι καλών χρωματισμών. Θα αποδείξουμε ότι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου Β και αντιστρόφως.

Πράγματι, αν $X : \underbrace{1\ 2\ 3 \ldots\ldots 50}_{x-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51 \ldots\ldots 98\ 99}_{y-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota} \in A$, τότε $x > y$. Αλλάζοντας το χρώμα κάθε αριθμού, προκύπτει ο χρωματισμός $Y : \underbrace{1\ 2\ 3 \ldots\ldots 50}_{(50-x)-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51 \ldots\ldots 98\ 99}_{(49-y)-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}$, ο οποίος ανήκει στο σύνολο Β των *όχι καλών* χρωματισμών, γιατί:

$$x > y \Rightarrow -x < -y \Rightarrow 49 - x < 49 - y \Rightarrow 50 - x \le 49 - y.$$

Έτσι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίσαμε ένα στοιχείο του συνόλου Β.

Αντίστροφα, αν $X : \underbrace{1\ 2\ 3 \ldots\ldots 50}_{x-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51 \ldots\ldots 98\ 99}_{y-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota} \in B$, τότε $x \le y$. Αλλάζοντας το χρώμα κάθε αριθμού, προκύπτει ο χρωματισμός $Y : \underbrace{1\ 2\ 3 \ldots\ldots 50}_{(50-x)-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51 \ldots\ldots 98\ 99}_{(49-y)-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}$, ο οποίος ανήκει στο σύνολο Α των *καλών* χρωματισμών, γιατί:

$$x \le y \Rightarrow -x \ge -y \Rightarrow 49 - x \ge 49 - y \Rightarrow 50 - x > 49 - y.$$

Έτσι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Β αντιστοιχίσαμε ένα στοιχείο του συνόλου Α.

Επομένως, μεταξύ των συνόλων Α και Β υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, οπότε τα δύο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, δηλαδή το πλήθος των καλών χρωματισμών είναι $\frac{2^{99}}{2} = 2^{98}$.