ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλους τους πενταψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\beta 0\gamma\delta} = \alpha\cdot 10^4 + \beta\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + \gamma\cdot 10 + \delta \ ,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ψηφία με $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$, οι οποίοι είναι κοινά πολλαπλάσια του 9 και του 4.

Λύση

Ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν τα άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9. Επομένως τα ψηφία $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ αρκεί να ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi o\lambda.9\,.$$

Επειδή $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$ έπεται ότι $10\le \alpha+\beta+\gamma+\delta \le 30$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=18,\ 0<\alpha<\beta<\gamma<\delta \text{ ή } \alpha+\beta+\gamma+\delta=27,\ 0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(1,2,6,9),(1,2,7,8),(1,3,5,9),(1,3,6,8).(1,4,5,8),(1,4,6,7),$$
$$(2,3,4,9),(2,3,5,8),(2,3,6,7),(2,4,5,7),(3,4,5,6)\}$$

$$\text{ή } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\{(4,6,8,9),(5,6,7,9)\}.$$

Επιπλέον ένα ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 4, οπότε αρκεί ο ακέραιος $\overline{\gamma\delta}$ να είναι πολλαπλάσιος του 4. Η συνθήκη αυτή περιορίζει τις παραπάνω τετράδες στις :

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(1,3,6,8) \text{ ή } (\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(3,4,5,6)\,.$$

Επομένως οι ζητούμενοι θετικοί ακέραιοι είναι οι: 13068, 34056.

Πρόβλημα 2

Ο Γιάννης και η Μαρία όταν βγήκαν για μία βόλτα είχαν μαζί τους και οι δύο συνολικά 600 ευρώ και ξόδεψαν και οι δύο μαζί 80 ευρώ. Αν ο Γιάννης ξόδεψε το $\frac{100}{9}\%$ των χρημάτων του και η Μαρία ξόδεψε το $\frac{100}{7}\%$ των χρημάτων της, να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους.

Λύση

Έστω ότι ο Γιάννης είχε α ευρώ μαζί του, οπότε η Μαρία θα είχε $600-\alpha$ ευρώ. Τότε ο Γιάννης ξόδεψε $\alpha \cdot \frac{100}{9} \cdot \frac{1}{100} = \frac{\alpha}{9}$ ευρώ, ενώ η Μαρία ξόδεψε $(600-\alpha) \cdot \frac{100}{7} \cdot \frac{1}{100} = \frac{600-\alpha}{7}$. Επομένως έχουμε την εξίσωση

$$\frac{\alpha}{9} + \frac{600-\alpha}{7} = 80 \Leftrightarrow 7\alpha + 9(600-\alpha) = 5040$$

$$\Leftrightarrow 5400 - 2\alpha = 5040 \Leftrightarrow 2\alpha = 360 \Leftrightarrow \alpha = 180.$$

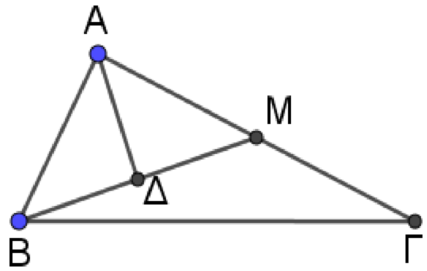
Άρα ο Γιάννης είχε μαζί του 180 ευρώ και η Μαρία είχε $600-180=420$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\mathrm{AB} = \alpha\ cm$ και $\mathrm{A\Gamma} = 2\alpha\ cm$. Το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ και το σημείο Δ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΒΜ.

(α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ.

(β) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις ΑΔ και ΒΜ, αντίστοιχα.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Έχουμε:

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = 2(\mathrm{ABM}) \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma} = 2\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AM} \Rightarrow \mathrm{A\Gamma} = 2\mathrm{AM}.$$

Επομένως Μ μέσον ΑΓ και Ισχύει $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha\ cm$. Αφού και $\mathrm{AB} = \alpha\ cm$, έχουμε $\mathrm{AB} = \mathrm{AM}$. Επομένως το σημείο Α ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ και αφού Δ μέσον της ΒΜ, προκύπτει ότι η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΜ. Άρα είναι $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{BM}$.

Διαφορετικά, το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΔ διάμεσο, άρα και ύψος.

(β) Αφού το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΔ διάμεσο και ύψος, το ΑΔ θα είναι και διχοτόμος του. Επομένως $\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \mathrm{\Delta\hat{A}M} = 45^0$. Όμως ισχύει ότι $\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \mathrm{A\hat{M}\Delta} = 45^0$ (αφού ΑΒΜ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο) επομένως ΑΒΔ και ΑΔΜ ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα δηλαδή $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{\Delta M} = \mathrm{\Delta B} = \frac{\mathrm{BM}}{2}$. Τώρα έχουμε:

$$\frac{\mathrm{E}_{\tau\varepsilon\tau\rho\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \mathrm{A\Delta}}}{\mathrm{E}_{\tau\varepsilon\tau\rho\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \mathrm{BM}}} = \frac{\mathrm{A\Delta}^2}{\mathrm{BM}^2} = \frac{\mathrm{A\Delta}^2}{(2\mathrm{A\Delta})^2} = \frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιώργος έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Γιώργου ήταν 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Γιώργος στο τετράδιο του.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$. Τότε ο αριθμός που προέκυψε από τη διαγραφή του τελευταίου ψηφίου του ήταν ο $\mathrm{B} = \overline{\alpha\beta\gamma}$, οπότε σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}=2020.$$

Επειδή πρέπει $\mathrm{A}>2020$, διαπιστώνουμε ότι πρέπει $\alpha\geq 2$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $\alpha\geq 4,$ τότε $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\geq 4000,\ \mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma}<1000,$ οπότε
$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}-\overline{\alpha\beta\gamma}>3000>2020, \text{ άτοπο.}$$
- Αν είναι $\alpha=3,$ τότε
$$\begin{aligned}\mathrm{A}-\mathrm{B}&=\overline{3\beta\gamma\delta}-\overline{3\beta\gamma}\\&=3000+100\beta+10\gamma+\delta-300-10\beta-\gamma\\&=2700+90\beta+9\gamma+\delta>2020, \text{ άτοπο.}\end{aligned}$$
- Αν είναι $\alpha=2,$ τότε
$$\begin{aligned}&\mathrm{A}-\mathrm{B}=\overline{2\beta\gamma\delta}-\overline{2\beta\gamma}=2020\\&\Leftrightarrow 2000+100\beta+10\gamma+\delta-200-10\beta-\gamma=2020\\&\Leftrightarrow 1800+90\beta+9\gamma+\delta=2020\\&\Leftrightarrow 90\beta+9\gamma+\delta=220.\end{aligned}$$

  Επειδή τα β,γ,δ είναι ψηφία, θα είναι $0\leq 9\gamma+\delta\leq 90,$ οπότε πρέπει $130\leq 90\beta\leq 220\Leftrightarrow\beta=2$. Τότε $9\gamma+\delta=40\Rightarrow 31\leq 9\gamma\leq 40\Rightarrow\gamma=4.$ Επομένως: $\delta=40-36=4$ και $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=2244$.