Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + 9 = (\beta - 3)^2 \qquad \text{και} \qquad \beta + 9 = (\alpha - 3)^2 ,$$

να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha^2 + \beta^2$.

Λύση

Οι δεδομένες σχέσεις γράφονται:

$$\alpha = \beta^2 - 6\beta \qquad (1)$$

$$\beta = \alpha^2 - 6\alpha \qquad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha + \beta = \alpha^2 + \beta^2 - 6(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 7(\alpha + \beta) \qquad (3)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha - \beta = \beta^2 - \alpha^2 - 6(\beta - \alpha) \Leftrightarrow (\beta - \alpha)(\beta + \alpha) - 5(\beta - \alpha) = 0 \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow (\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 5) = 0 \overset{\alpha \neq \beta}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta = 5. \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) λαμβάνουμε: $\alpha^2 + \beta^2 = 35$.

Πρόβλημα 2

Ο Δημήτρης έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Δημήτρη ήταν 2019. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Δημήτρης στο τετράδιο του.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$. Τότε ο αριθμός που προέκυψε από τη διαγραφή του τελευταίου ψηφίου του ήταν ο $\mathrm{B} = \overline{\alpha\beta\gamma}$, οπότε σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε:

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} - \overline{\alpha\beta\gamma} = 2019.$$

Επειδή πρέπει $\mathrm{A} > 2019$, διαπιστώνουμε ότι πρέπει $\alpha \geq 2$, οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $\alpha \geq 4$, τότε $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} \geq 4000$, $\mathrm{B} = \overline{\alpha\beta\gamma} < 1000$, οπότε
$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} - \overline{\alpha\beta\gamma} > 3000 > 2019, \text{ άτοπο.}$$
- Αν είναι $\alpha = 3$, τότε
$$\begin{aligned} \mathrm{A} - \mathrm{B} &= \overline{3\beta\gamma\delta} - \overline{3\beta\gamma} \\ &= 3000 + 100\beta + 10\gamma + \delta - 300 - 10\beta - \gamma \\ &= 2700 + 90\beta + 9\gamma + \delta > 2019, \text{ άτοπο.} \end{aligned}$$
- Αν είναι $\alpha = 2$, τότε
$$\begin{aligned} &\mathrm{A} - \mathrm{B} = \overline{2\beta\gamma\delta} - \overline{2\beta\gamma} = 2019 \\ &\Leftrightarrow 2000 + 100\beta + 10\gamma + \delta - 200 - 10\beta - \gamma = 2019 \\ &\Leftrightarrow 1800 + 90\beta + 9\gamma + \delta = 2019 \\ &\Leftrightarrow 90\beta + 9\gamma + \delta = 219. \end{aligned}$$

  Επειδή τα β, γ, δ είναι ψηφία, θα είναι $0 \leq 9\gamma + \delta \leq 90$, οπότε πρέπει $130 \leq 90\beta \leq 219 \Leftrightarrow \beta = 2$. Τότε $9\gamma + \delta = 39 \Rightarrow 31 \leq 9\gamma \leq 39 \Rightarrow \gamma = 4.$ Επομένως: $\delta = 39 - 36 = 3$ και $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 2243$.

.

Πρόβλημα 3.
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha - 1$ είναι πολλαπλάσιο του β, (ii) ο $\beta - 1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και
(iii) ο $\gamma - 1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Λύση
Για να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες πρέπει να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ, μ τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

$$2\alpha - 1 = \kappa\beta, \quad \beta - 1 = \lambda\gamma, \; \gamma - 1 = \mu\alpha \; .$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις λύνοντας ως προς α βρίσκουμε ότι:

$$2\alpha = \kappa\beta + 1 = \kappa\left(\lambda\gamma + 1\right) + 1 = \kappa\left(\lambda(\mu\alpha + 1) + 1\right) + 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \kappa\lambda\mu\alpha + \kappa\lambda + \kappa + 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\kappa\lambda + \kappa + 1}{2 - \kappa\lambda\mu}.$$

Επομένως, μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης είναι:

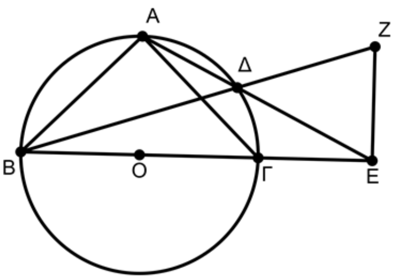
$$2 - \kappa\lambda\mu > 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda\mu < 2.$$

Επειδή οι κ, λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι έχουμε μόνο την περίπτωση:

- $\kappa = \lambda = \mu = 1$. Τότε $\alpha = 3$.

  $\alpha = 3, \gamma - 1 = \alpha, \beta - 1 = \gamma \Rightarrow \alpha = 3, \gamma = 4, \beta = 5 \Rightarrow \left(\alpha, \beta, \gamma\right) = \left(3, 5, 4\right)$.

Πρόβλημα 4



Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και Δ τυχόν σημείο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και $\Gamma\hat{E}Z = 90^0$.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $E\hat{\Delta}Z$

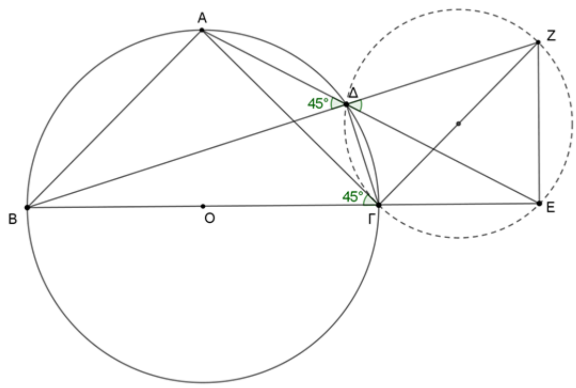
(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma E = EZ$

Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Λύση

(α) Επειδή το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$, τα τόξα $\overset{\frown}{BA}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι ίσα και επιπλέον το άθροισμα μας τους είναι 180° , οπότε καθένα από αυτά θα είναι 90°. Επομένως η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{\Delta}B$ στο τόξο $\overset{\frown}{BA}$ θα είναι ίση με $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Όμως οι γωνίες $E\hat{\Delta}Z$ και $A\hat{\Delta}B$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, οπότε $E\hat{\Delta}Z = 45^\circ$



Σχήμα 2

(β) Επειδή η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, είναι . $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ Επομένως θα έχουμε και ότι $\Gamma\hat{\Delta}Z = 180^\circ - B\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Επίσης δίνεται ότι $\Gamma\hat{E}Z = 90^\circ$. Επομένως ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα ΓΖ περνάει από τα σημεία Δ και Ε. Τότε η εγγεγραμμένη σε αυτόν το κύκλο γωνία $Z\hat{\Gamma}E$ βαίνει στο ίδιο τόξο με την εγγεγραμμένη γωνία $E\hat{\Delta}Z = 45^\circ$. Άρα είναι $Z\hat{\Gamma}E = 45^\circ$. Επομένως το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\Gamma E = EZ$.