1.2. Πιθανότητες: Ορισμοί και εφαρμογές

Διδακτικοί στόχοι

- Ποιος ο κλασσικός ορισμός της Πιθανότητας και οι ιδιότητές του
- Τι ορίζουμε ως ισοπίθανα ενδεχόμενα
- Ποιος ο αξιωματικός ορισμός της Πιθανότητας και οι ιδιότητές του

Θεωρία και Μεθοδολογία

- Η πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου Α , συμβολίζεται ως Ρ(Α) .

- **Ισοπίθανα ενδεχόμενα**

  Ονομάζονται τα ενδεχόμενα, όπου το κάθε στοιχείο του συνόλου έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης, με οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του ενδεχομένου.

Εφαρμογή 1 : Ρίχνω ένα ζάρι. Ο δειγματικός χώρος είναι: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Γίνται αντιληπτό, ότι η εμφάνιση του αριθμού ‘’3’’ έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης με τον αριθμό ‘’5’’ και ισούται με $\frac{1}{6}$. Δηλαδή, πιο απλά, αν ρίξω το ζάρι 6 φορές , περιμένω κατά προσέγγιση 1 φορά να εμφανιστεί ο κάθε αριθμός.

Παρατηρούμε, ότι αν προσθέσουμε την πιθανότητα εμφάνισης του κάθε στοιχείου του δειγματικού χώρου, το αποτέλεσμα ισούται με 1.

Κλασικός ορισμός της Πιθανότητας

SOS για τις εξετάσεις

Σε ένα πείραμα τύχης με ν ισοπίθανα αποτελέσματα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α που περιέχει κ τέτοια αποτελέσματα είναι:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Α}}{\textbf{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\kappa}{\nu} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Εφαρμογή 2 : Ρίχνωένα αμερόληπτο κέρμα .Γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης , είναι Ω = {Κ , Γ }.

Αν Α το ενδεχόμενο να έρθει Κ στην ρίψη του κέρματος, τότε έχουμε από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας:

$$P(A) = \frac{\textbf{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Α}}{\textbf{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{1}{2}$$

Άρα, η πιθανότητα εμφάνισης Κ είναι 50% ή 0,5 και η πιθανότητα εμφάνισης Γ είναι 50% ή 0,5.

Σημείωση:

Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν οι εξής ιδιότητες:

a) P(Ω) = 1
b) P(∅) = 0
c) Για κάθε ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω , ισχύει: 0≤ P (A) ≤ 1

a) P(Ω) = 1 .

Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, έχουμε :

$$P(\Omega) = \frac{\textbf{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Ω}}{\textbf{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$$

b) P(∅) = 0 .

Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, έχουμε :

$$P(\emptyset) = \frac{\textbf{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } \emptyset}{\textbf{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$$

c) 0≤ P (A) ≤ 1 , για κάθε A ⊆ Ω .

Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, έχουμε :

$$0<P(A) = \frac{\textbf{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A}}{\textbf{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\kappa}{\nu} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} < 1 \text{ , διότι} \kappa<\nu$$

Αν κ = 0 , τότε P(A) = 0 και αν κ=ν τότε P(A) = 1 .

Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σεένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, είναι απαραίτητο ταaπλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα. Για τιςπεριπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

- **Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας** **SOS για τις εξετάσεις**

Έστω Ω = {ω_1, ω_2,..., ω_κ} ένας δ.χ. ενός πειράματος τύχης. Σε κάθε ενδεχόμενοA του Ω αποδίδουμε έναν πραγματικό αριθμό που ονομάζουμε πιθανότητατου Α και συμβολίζουμε με P(A), έτσι ώστε:

— P(A) ≥ 0, για οποιοδήποτε A του Ω

— P(Ω) = 1

— Ικανοποιείται ο απλός προσθετικός νόμος:**P(A ∪ B) = P(A) + P(B) + P(A ∩ B) .**

Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω, τότε:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, γιατί όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα, αν $A \cap B = \emptyset$ και τότε $P(A \cap B) = 0$.

Μεθοδολογία αξιοποίησης του αξιωματικού ορισμού της Πιθανότητας

- Προσδιορίζουμε τα δυνατά αποτελέσματα $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ δηλαδή έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο για το πείραμα τύχης
- Αντιστοιχίζουμε στα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_\nu\}$ τους πραγματικούς αριθμούς $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ που εκφράζουν πόσο πιθανό θεωρούμε κάθε δυνατό αποτέλεσμα. Δηλαδή $P(\{\omega_i\})=\rho_i$

  για κάθε $i = 1,2,3,\ldots,\nu$.

  Αυτό το κάνουμε ώστε να ισχύουν:

  — $0 \le \rho_i$, για κάθε $i = 1,2,\ldots,\nu$ (αφού θέλουμε $P(A) \ge 0$)

  — $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\nu = 1$ (αφού θέλουμε $P(\Omega)=1$)
- Προκειμένου να αποδώσουμε πιθανότητα σε οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο χρησιμοποιούμε το 3ο αξίωμα (τον απλό προσθετικό νόμο).

Για παράδειγμα, $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$

Με αυτόν τον τρόπο αποδίδουμε πιθανότητα σε οποιοδήποτε σύνθετο ενδεχόμενο του Ω, εξασφαλίζοντας ότι ο αξιωματικός ορισμός ικανοποιείται.

Εφαρμογή 3 :

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι. Ο δ.χ. είναι Ω = {1,2,3,4,5,6}.

Θεωρώ το ενδεχόμενο Α = {1,3,5}.

Τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α , είναι :

$$P(A) = \frac{\textbf{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Α}}{\textbf{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1 :

Ρίχνουμε 2 αμερόληπτα ζάρια . Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

Λύση:

Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος, χρησιμοποιούμε έναν πίνακα “διπλής εισόδου”, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

1ο \ 2ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Από τον πίνακα αυτόν έχουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω έχει 36 ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή N(Ω)= 36.

Το ενδεχόμενο Α: "να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς", είναι το:

A = {(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)}.Άρα, N(A) = 10.

Άρα, $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Άσκηση 2 :

Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν P(A) = 0,6 καιP(B) = 0,5 .

i. Να εξεταστεί αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.
ii. Να αποδείξετε ότι $0,1 \le P(A \cap B) \le 0,5$.

Λύση :

i.Αν τα Α και Β ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα είχαμε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,6 + 0,5 = 1,1$ ισχύει, δηλαδή, $P(A \cup B) > 1$, που είναι άτοπο. Άρα, τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii. Επειδή $A \cap B \subseteq B$ και $A \cap B \subseteq A$, έχουμε $P(A \cap B) \le P(B)$ και $P(A \cap B) \le P(A)$,

επομένως $P(A \cap B) \le 0,5$ (1)

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - P(A \cap B).$$

Όμως $P(A \cup B) \le 1$.

Επομένως:

$0,6 + 0,5 - P(A \cap B) \leq 1$.

$0,6 + 0,5 - 1 \leq P(A \cap B)$

$0,1 \leq P(A \cap B)$ (2)

Απότις (1) και (2) προκύπτειότι:$0,1 \leq P(A\text{-}B) \leq 0,5$.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 :

a) Διατυπώστε τον κλασσικό ορισμό της Πιθανότητας
b) Διατυπώστε τον αξιωματικό ορισμό της Πιθανότητας

Άσκηση 2 :

Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τιςπιθανότητες των ενδεχομένων

a) το χαρτί να είναι πέντε
b) το χαρτί να μην είναι πέντε.

Άσκηση 3 :

Να βρείτε την πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούνδύο “γράμματα”.

Άσκηση 4 :

Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες τωνενδεχομένων η μπάλα να είναι:

i. μαύρη
ii. άσπρη ή μαύρη
iii. ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

Άσκηση 5 :

Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα

i. να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος
ii. να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.

Άσκηση 6 :

Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{17}{30}$, $P(B) = \frac{7}{15}$ και

$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$. Είναι ασυμβίβαστα;

Άσκηση 7 :

Για δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι:

$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Άσκηση 8 :

Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;

Άσκηση 9 :

Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε Ρ(Α) =κ, Ρ(Β) = λ

και Ρ(Α ∩ Β) = μ .Να βρείτε τις πιθανότητες:

i) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α και Β

ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β

iii) να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

Άσκηση 10 :

Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.

Άσκηση 11 :

Αν $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες Ρ(Α) και Ρ(Α') .

Άσκηση 12 :

Αν 0 <P(A) < 1 , να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{P(\mathrm{A})}+\frac{1}{P(\mathrm{A}')}\geq 4$.

Άσκηση 13 :

Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με P(A) = 0,6και P(B) = 0,7, να δείξετε ότι 0,3 ≤ P(A ∩ B) ≤ 0,6.

Άσκηση 14 :

Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι :

P(B) – P(A’) ≤ P(A ∩ B) .

Άσκηση 15 :

Ένα κέρμα είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε κατά τη ρίψη του η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι 0,95. Θεωρείτε ότι το πείραμα αυτό είναι πείραμα τύχης;

Άσκηση 16 :

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα τωνρίψεων. Να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της 1ης στήλης με τις πιθανότητεςτης 2ης στήλης:

1η στήλη
— Έρχεται διπλή ζαριά (το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο ζάρια.)
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι περιττός αριθμός.
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι άρτιος αριθμός.
— Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει άρτιο αποτέλεσμα.
— Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.
— Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.

2η στήλη
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$
0,5

Άσκηση 17 :

Σε ένα μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα από τα παιδιά που γεννήθηκαντο 30% ήταν αγόρια και το 70% ήταν κορίτσια. Με ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις συμφωνείτε;

α) Σε αυτό το μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα γεννήθηκαν περισσότερα κορίτσια.

β) Αν ένα ζευγάρι που περιμένει παιδί επιλέξει αυτό το μαιευτήριο για τον τοκετό, τότε η πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι.

γ) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί από τον κατάλογο των νεογέννητων του προηγούμενου μήνα σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι αγόρι είναι ίση με 0,3.

δ) Αν επιλέξουμε ένα παιδί στην τύχη από την λίστα των παιδιών που έχουν γεννηθεί σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι κορίτσι είναι0,7.

Άσκηση 18 :

Σε μία κλειστή κάλπη τοποθετούνται 5 κόκκινα και 6 πράσινα σφαιρίδια. Από την κάλπη βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο.

a) Αφού βγάλουμε το σφαιρίδιο, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να υπάρχει στην κάλπη ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα;
b) Αν στην κάλπη αρχικά υπήρχαν περισσότερα σφαιρίδια, αλλά πάλι τα πράσινα ήταν περισσότερα από τα κόκκινα κατά 1, να διερευνήσετε αν και πόσο θα άλλαζε η πιθανότητα του ίδιου ενδεχομένου;

Άσκηση 19 :

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο κέρμα δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: έρχεται το πολύ μία φορά Κεφαλή.

Β: έρχεται τουλάχιστον μία φορά Κεφαλή.

Γ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι διαφορετικό.

Δ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι το ίδιο.

a) Να αποδείξετε ότι $P(A)=P(B)$ και ότι $P(\Gamma) = P(\Delta)$.
b) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.
c) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Γ', $\Gamma \cap \Delta$, $\Gamma \cup \Delta$, $B \cup \Gamma'$.

Άσκηση 20 :

Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαίακαρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει:

α) τουλάχιστον μία ασθένεια;

β) μόνο μία ασθένεια;

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 :

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι :

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$και$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cup B)$.

Άσκηση 2 :

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι :

$P(A) = P(B)$, $P(A \cup B) = 0{,}6$ και $P(A \cap B) = 0{,}2$. Να βρείτε την $P(A)$.

Άσκηση 3 :

Σε μια τάξη με 30 μαθητές, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέλφια έχουν.Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον πίνακα:

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία από την τάξη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά.

Άσκηση 4 :

Για ένα φάρμακο σε πειραματικό στάδιο αποδείχθηκε ότι δημιουργεί δύο ειδώνπαρενέργειες. Η πιθανότητα να δημιουργήσει πρόβλημα στην όραση του ασθενούς είναιμικρότερη του 0,07, η πιθανότητα να δημιουργήσει δυσλειτουργία στο γαστρεντερικόείναι 0,05 και τέλος η πιθανότητα να εμφανιστούν παρενέργειες και στην όραση και στογαστρεντερικό είναι 0,02.

Το φάρμακο επιτρέπεται να κυκλοφορήσει, αν η πιθανότητα να μην δημιουργήσει παρενέργειες είναι μεγαλύτερη του 0,9.Να εξετάσετε αν το φάρμακο θα κυκλοφορήσει.

Άσκηση 5 :

Σε ένα τουρνουά μπάσκετ παίρνουν μέρος 25 ομάδες. Το 80% των ομάδωνπροκρίνεται στον ημιτελικό γύρο και το 40% από αυτές που προκρίνονται συμμετέχουν στον τελικό. Αν διαλέξουμε μια ομάδα στην τύχη (για τις επιδόσεις των ομάδων δε γνωρίζουμε τίποτα), τότε:

Α. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α : "Η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό ή στον τελικό".

Β : " Η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό, αλλά όχι στον τελικό" .

Γ : "Η ομάδα που διαλέξαμε δεν προκρίνεται στον τελικό" .

Δ : " Η ομάδα που διαλέξαμε δεν προκρίνεται στον ημιτελικό ή παίζει στον τελικό" .

Β. Σε ποιο από τα παραπάνω ενδεχόμενα μας συμφέρει να στοιχηματίσουμε;

Άσκηση 6 :

Σε ένα αεροπορικό ταξίδι, το 20% των επιβατών είναι άντρες που δεν έχουν ταξιδέψει ξανά με αεροπλάνο. Το 30% των επιβατών είναι γυναίκες που έχουν ταξιδέψει ξανά και η πιθανότητα κάποιος επιβάτης να είναι άντρας ή να έχειταξιδέψει ξανά είναι 90%. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν επιβάτη, να βρείτε την πιθανότητα:

a) Να είναι άντρας.
b) Να είναι άντρας και να έχει ταξιδέψει ξανά.
c) Να έχει ταξιδέψει ξανά.
d) Να είναι γυναίκα και να μην έχει ταξιδέψει ξανά.

Άσκηση 7 :

Στις πανελλήνιες εξετάσεις το 70% των μαθητών από το νομό Ευβοίας έγραψε καλά στη Βιολογία Γενικής Παιδείας ή στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας και το 20% έγραψε καλά και στα δύο μαθήματα .

Α. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψε καλά στο ένα μόνο μάθημα .

Β. Αν το 40% έγραψε καλά στη Βιολογία, τότε:

a) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψε καλά στα μαθηματικά και όχι στη Βιολογία .
b) Αν οι μαθητές που έγραψαν καλά στη Βιολογία και όχι στα μαθηματικά είναι 600, να βρείτε πόσοι μαθητές από το νομό Ευβοίας έλαβαν μέρος στις εξετάσεις .

Άσκηση 8 :

Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω .

Α. Να δείξετε ότι $P(A' \cup B') \geq P[(A-B) \cup (B-A)]$

Β. Αν $P(B'-A) = 0{,}2$, $P(B') = 0{,}7$ και $P[(A-B) \cup (B-A)] = 0{,}7$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A \cap B)$.

Άσκηση 9 :

Αν Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι:

a) $P(A \cup B) \geq \frac{P(A)+P(B)}{2}$
b) $P(A \cap B) \geq P(B) - P(A')$
c) $P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cup B)$
d) $P(A \cap B) + P(A\cup B) < P(A) + P(B) +1$

Άσκηση 10 :

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω, που αποτελείται από 2004 στοιχεία, τα οποία είναιισοπίθανα . Θεωρούμε τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α' του Ω, με$0 < P(A) < 1$.

Α. Να αποδείξετε ότι: $4 * [\frac{\boldsymbol{P}(\mathrm{A})}{\boldsymbol{P}(\mathrm{A}')} + \frac{1}{\boldsymbol{P}(\mathrm{A})}] \geq 5$.

Β. Αν στην παραπάνω σχέση ισχύει η ισότητα τότε:

a) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του Α .
b) Αν κάποιο ενδεχόμενο Β του Ω έχει 1453 στοιχεία, να αποδείξετε ότι τα Α,Β δεν είναι ασυμβίβαστα .