1.3. Πιθανότητες και πράξεις με ενδεχόμενα

Διδακτικοί στόχοι

- Εφαρμογές του κλασσικού ορισμού της Πιθανότητας
- Κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων
- Εφαρμογές του αξιωματικού ορισμού της Πιθανότητας

Θεωρία και Μεθοδολογία

Κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων **SOS για τις εξετάσεις**

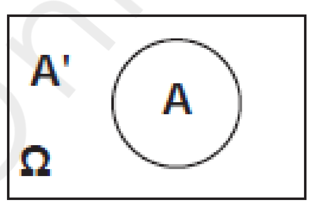
Α. **P(Α΄) = 1 – P(Α)**

Απόδειξη:

Τα Α και Α΄ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και ισχύει: $A \cup A' = \Omega$

Από τον απλό προσθετικό νόμο προκύπτει ότι:

$P(\Omega) = P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(A) + P(A') = 1 \Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A)$



Β. **$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$**

Απόδειξη:

Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και η ένωσή τους είναι το A,δηλαδή:

$(A \cap B) \cup (A - B) = A$. Από τον απλό προσθετικό νόμο:

$P((A \cap B) \cup (A - B)) = P(A \cap B) + P(A - B) \Leftrightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$

Γ. **Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B) \leq P(A)$**

Απόδειξη:

ΑπότοΒέχουμεότι: $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$. ΕφόσονΒ$\subseteq$Α, ισχύειότι$A \cap B = B$, άρα:

$P(A) = P(B) + P(A – B)$

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $P(A – B) \geq 0$ προκύπτει:$P(A) \geq P(B)$

Δ. **$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$**

Απόδειξη:

Τα ενδεχόμενα $A - B$ και B είναι ασυμβίβαστα και ισχύει: $(A - B) \cup B = A \cup B$

Από τον απλό προσθετικό νόμο: **$P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B)$** $\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$

Με τη βοήθεια του (Β) για το $A - B$:$P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + P(B) \Leftrightarrow$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ε. Αν Α,Β ασυμβίβαστα, τότε **$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$**

Απόδειξη:

Από το (Δ) έχω ότι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Αφού Α,Β ασυμβίβαστα, τότε $P(A \cap B) = 0$.

Άρα, αν Α,Β ασυμβίβαστα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Γενικώς, για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ισχύει: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Αν $P(A \cap B) > 0$, τότε προκύπτει η ανισότητα: $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1 :

Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: Ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

Β: Ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cap B$.

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στην ομάδα στίβου αλλά όχι στη θεατρική ομάδα».

γ) Με Γ συμβολίζουμε το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στον όμιλο μουσικής». Υπάρχουν μαθητές/τριες του ομίλου μουσικής που συμμετέχουν σε κάποια από τις άλλες ομάδες;

Αν ναι, μπορούμε ναβρούμε σε ποια από τις άλλες ομάδες συμμετέχουν;

Λύση :

α) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στηνομάδα στίβου» είναι το Α ∪ Β άρα θα είναι: $P(A \cup B) = \frac{23}{30}$.

Από τη σχέση **P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)** έχουμε $\frac{23}{30} = \frac{2}{5} + \frac{7}{15} - P(A \cap B)$. Άρα, $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

β) Ισχύει **P(B-A) =P (B) - P(A ∩ B)** $= \frac{7}{15} - \frac{1}{10} = \frac{11}{30}$,

που είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου και όχι στη θεατρική ομάδα».

γ) Παρατηρούμε ότι: **P(A ∪B)+P(Γ) >1**

Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν μαθητές/τριες του ομίλου μουσικής πουσυμμετέχουν σε κάποια από τις άλλες ομάδες, τότε θα ήταν $(A \cup B) \cap \Gamma = \emptyset$.

Αυτό σημαίνει ότι, λόγω του απλού προσθετικού νόμου θα έχουμε:

P[(A ∪ B) ∪Γ] = P(A ∪ B) + P(Γ), άρα $P[(A \cup B) \cup \Gamma] > 1$, πουείναιάτοπο.

Σίγουρα, λοιπόν, η τομή $(A \cup B) \cap \Gamma$δενείναικενή. Συνεπώςυπάρχουνμαθητές του ομίλου μουσικής που συμμετέχουν και σε άλλη ομάδα (ή και στις δύο άλλες ομάδες). Ωστόσο, δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν το Γ έχει μη κενή τομή με το Α, με το Β ή και με τα δύο. Άρα δε γνωρίζουμε σε ποια άλλη ομάδα συμμετέχουν αυτοί οι μαθητές.

Άσκηση 2 :

Σε ένα άλλο Λύκειο από αυτό του προβλήματος της Διερεύνησης οι μαθητές/τριες έχουν τη δυνατότητα να συμμετάσχουν σε θεατρική ομάδα και ομάδα στίβου.

Το 28% των μαθητών/τριών συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 20% στην ομάδα στίβου και το 12% και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν/μία μαθητή/τρια. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε:

α) να συμμετέχει σε τουλάχιστον μία από τις δύο ομάδες,

β) να συμμετέχει μόνο στη θεατρική ομάδα,

γ) να συμμετέχει σε μία μόνο από τις δύο ομάδες,

δ) να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

Λύση :

Αν Α είναι το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην θεατρική ομάδα» και

Β «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην ομάδα στίβου», τότε

$P(A) = 0{,}28$, $P(B) = 0{,}2$. Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει και στις δύο ομάδες» είναι το $A \cap B$ και από τα δεδομένα του προβλήματος $P(A \cap B) = 0{,}12$.

α) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει σε τουλάχιστον μία από τις δύοομάδες» είναι το $A \cup B$, συνεπώς από το (Δ.) με αντικατάσταση έχουμε:

$$P(A \cup B) = 0{,}28 + 0{,}2 - 0{,}12 = 0{,}36.$$

β) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει μόνο στη θεατρική ομάδα» είναιτο $A - B$ και σύμφωνα με το (Β.) ισχύει : $P(A - B) = 0{,}28 – 0{,}12 = 0{,}16$.

γ) Θα χρειαστεί πρώτα να βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου», δηλαδή του Β - Α. Από τον (Β) είναι:

$$P(B - A) = 0{,}2 - 0{,}12 = 0{,}08.$$

Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει σε μία μόνο από τις δύο ομάδες» είναι η ένωση των ασυμβίβαστων ενδεχομένων Α - Β και Β - Α.

Σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$\mathbf{P\,[\,(A\text{-}B)\cup(\,B\text{-}A)\,]=P\,(A\text{-}B)+P\,(B\text{-}A)} = 0{,}16+0{,}08=0{,}24$$

δ) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια δε συμμετέχει σε καμία ομάδα» είναι το$(A \cup B)'$.

Από το (Α) είναι: $\mathbf{P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)} = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 :

Να αποδείξετε τις σχέσεις:

a) $P(A') = 1 - P(A)$
b) $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$
c) Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B) \leq P(A)$
d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
e) Αν A,B ασυμβίβαστα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Άσκηση 2 :

Αν A,B δύο ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω , να αποδείξετε ότι:

a. $P(A \cup B) \geq \frac{P(A)+P(B)}{4}$
b. $P(A \cap B) \geq P(B) - P(A')$
c. $P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cup B)$
d. $P(A \cap B) + P(A \cup B) < P(A) + P(B) + 1$

Άσκηση 3 :

Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι :

$P(\Omega) = P(A)$, $P(A \cup B) = 0{,}5$ και $P(A \cap B) = 0{,}2$. Να βρείτε την P(A) .

Άσκηση 4 :

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι: $P(A) = 1/2$, $P(B\neg A') = 2/5$ και$P(A \cap B) = 1/15$. Να βρείτε την $P(A \cup B)$.

Άσκηση 5 :

Το 50% των δωματίων ενός ξενοδοχείου έχουν τζάκι, το 20% έχουν καλοριφέρ και το 10% και τζάκι και καλοριφέρ. Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο του ξενοδοχείου.

Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το δωμάτιο που επιλέξαμε:

α) να μην έχει τζάκι,

β) να μην έχει ούτε τζάκι ούτε καλοριφέρ,

γ) να έχει μόνο τζάκι;

Άσκηση 6 :

Ας υποθέσουμε ότι Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

α) Αν ισχύει ότι $P(A) = 0{,}8$ και $P(B) = 0{,}1$. Ισχύει ότι $B \subseteq A$, γιατί $P(B) \leq P(A)$.

β) Αν $P(A) = 0{,}3$, $P(B) =0{,}4$ και $P(A \cup B) = 0{,}6$, τότε τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ) Αν $P(A) = 0{,}4$ και $P(B) = 0{,}6$, τότε το συμπληρωματικό του Α είναι το Β.

δ) Ισχύει πάντα ότι $P(A) + P(B) \leq 1$.

ε) Ισχύει πάντα ότι $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$.

στ) Αν ισχύει $P(A) + P(B) = 1{,}5$, τότε τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

ζ) Αν ισχύει $P(A) + P(B) < 1$, τότε τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

η) Ισχύει ότι $P(A \cap B) \leq P(A)$.

Άσκηση 7 :

Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα με την άσκηση 6, αν αντί για τα ποσοστά που δίνονται, γνωρίζετε αυτή τη φορά ότι το Λύκειο έχει συνολικά 120 μαθητές/τριες, από τους/τις οποίους/ες οι 32 συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, οι 28 στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές/τριες συμμετέχουν και στις δύο ομάδες.

Άσκηση 8 :

Από τους/τις μαθητές/τριες της Β΄ τάξης ενός Λυκείου το 55% είναι μαθήτριες,το 40% παίζουν μπάσκετ και το 10% είναι μαθήτριες που παίζουν μπάσκετ.Επιλέγουμε τυχαία έναν/μία μαθητή/τρια.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ακόλουθων ενδεχομένων:

α) μαθήτρια ή να παίζει μπάσκετ,

β) μαθήτρια και να μην παίζει μπάσκετ,

γ) μαθητής και να παίζει μπάσκετ,

δ) μαθητής ή να παίζει μπάσκετ.

Άσκηση 9 :

Όλοι οι κάτοικοι μιας μικρής επαρχιακής πόλης έχουν συμβόλαιο κινητού τηλεφώνου. Το 47% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την εταιρεία Cosmote,το 35% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την Vodafone. Παίρνουμε τυχαίατηλέφωνο έναν κάτοικο της πόλης. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «*ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο δεν έχει συμβόλαιο με καμία απότις Cosmote και Vodafone*» είναι 23%. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο:

α) να έχει συμβόλαιο με την Cosmote ή με την Vodafone,

β) να έχει συμβόλαιο και με τις δύο εταιρείες.

Άσκηση 10 :

Από τον πληθυσμό μιας πόλης το 42% δεν έχουν κάνει ποτέ σκι το 58% δενέχουν ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο, αλλά το 29% έχουν ήδη κάνει σκι καιέχουν ταξιδέψει με αεροπλάνο. Αν πάρουμε τυχαία έναν κάτοικο της πόληςποια είναι η πιθανότητα να μην έχει κάνει ποτέ σκι και να μην έχει ταξιδέψειποτέ με αεροπλάνο;

Άσκηση 11 :

Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:

i) μαύρη ii) άσπρη ή μαύρη iii) ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

Άσκηση 12 :

Στις πανελλήνιες εξετάσεις το 60% των μαθητών από το νομό Μεσσηνίας έγραψεκαλά στην Ιστορία Γενικής Παιδείας ή στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας και το 15% έγραψε καλά και στα δύο μαθήματα .

Α. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψε καλά στο ένα μόνο μάθημα.

Β. Αν το 40% έγραψε καλά στην Ιστορία, τότε:

a) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψε καλά στα Μαθηματικά και όχι στην Ιστορία.
b) Αν οι μαθητές που έγραψαν καλά στηνΙστορία και όχι στα Μαθηματικά είναι 500, να βρείτε πόσοι μαθητές από το νομό Μεσσηνίας έλαβαν μέρος στις εξετάσεις.

Άσκηση 13 :

Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{17}{30}$, $P(B) = \frac{7}{15}$ και

$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$, $P(A \cap B')$, $P(A-B)$.

Άσκηση 14 :

Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με P(A) = 0,6και P(B) = 0,7, να δείξετε ότι $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$.

Άσκηση 15 :

Σε μία κλειστή κάλπη τοποθετούνται 5 άσπρα και 6 μαύρα σφαιρίδια.Από την κάλπη βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο.

a) Αφού βγάλουμε το σφαιρίδιο, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να υπάρχει στην κάλπη ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα;
b) Αν στην κάλπη αρχικά υπήρχαν περισσότερα σφαιρίδια, αλλά πάλι τα άσπρα ήταν περισσότερα από τα μαύρα κατά 1, να διερευνήσετε αν και πόσο θα άλλαζε η πιθανότητα του ίδιου ενδεχομένου;

Άσκηση 16 :

Έστω τα σύνολα Ω = {ω ε N: 0≤ ω ≤20}

A = {ω ε Ω: ω πολλαπλάσιο του 3} καιB = {ω ε Ω: ω πολλαπλάσιο του 4} .

Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα στοιχείο του Ω, να βρείτε τις πιθανότητες των ακόλουθων ενδεχομένων:

a) «το στοιχείο να ανήκει στο Α»
b) «το στοιχείο να μην ανήκει στο Β»

Άσκηση 17 :

Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει:

α) τουλάχιστον μία ασθένεια;

β) μόνο μία ασθένεια;

Άσκηση 18 :

Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει Γερμανικά, το 30% Ισπανικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή.Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες, καθώς και την πιθανότητα να μιλάει μόνο Γερμανικά.

Άσκηση 19 :

Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$P(A\cap B) \geq P(B) - P(A')$$

Άσκηση 20 :

Έστω Ω={1,2,3,....,n} ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθαναααπλά ενδεχόμενα και Α,Β δυο ενδεχόμενα του Ω τέτοια ώστε:

N (A∪B) = 5, P (A-B) = $\frac{1}{10}$, P (A ∩ B) = $\frac{1}{20}$

A1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α.

A2. Να αποδείξετε ότι P(B) = $\frac{5}{\nu} - \frac{1}{10}$

A3. Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Β και όχι το Α είναι ίση με $\frac{1}{10}$, να βρείτε το ν.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 :

Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με P(A∪B) = $\frac{7}{8}$ και P (A ∩ B) = $\frac{1}{8}$.

a) Να δείξετε ότι P(A)+P(B) = 1 .
b) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α,Β .

Άσκηση 2 :

Ένα κουτί περιέχει 5 κίτρινες, x πράσινες και y γαλάζιες μπάλες . Παίρνουμετυχαία μια μπάλα από το κουτί. Αν η πιθανότητα να πάρουμε πράσινη ή γαλάζιαμπάλα είναι $\frac{3}{4}$, ενώ η πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη ή γαλάζια είναι $\frac{3}{5}$, τότε:

Α. Να βρείτε τα x , y καθώς επίσης και πόσες μπάλες έχει το κουτί .

Β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη ή πράσινη μπάλα.

Άσκηση 3 :

Αν Α,Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , με P(A) = 0,2 , P(B) = $\frac{2}{3}$ και

P (A ∩ B) = $\frac{1}{12}$. Να βρείτε την πιθανότητα καθενός εκ των ακόλουθων ενδεχομένων:

Α. Να μην πραγματοποιηθεί το Α .

Β. Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α,Β .

Γ. Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α,Β .

Δ. Να πραγματοποιηθεί μόνο το Α .

Ε. Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα Α,Β .

ΣΤ. Να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα Α,Β .

Άσκηση 4 :

Α. Αν Α,Β δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με:

$$P(A) = \kappa^2,\ P(B) = 5\kappa^2 - 7\kappa + 3$$

Να δείξετε ότι: $\frac{1}{2} \leq \kappa \leq \frac{2}{3}$.

Β. Αν Α ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω με:

$$|2P(A) + 3| - |2P(A) - 5| = \rho,$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει $|\rho| \leq 2$.

Γ. Αν Α,Β δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) > \frac{1}{9}$, $P(B) = \frac{4P(A)}{9P(A)-1}$,

να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B) .

Άσκηση 5 :

Έστω Ω δειγματικός χώρος που αποτελείται από το σύνολο των ριζών της εξίσωσης

(χ-10)(χ-11)…(χ-20) = 0.

Α. Αν ο Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και λεΩ, να βρεθεί ηπιθανότητα η εξίσωση $\psi^2 - 8\psi + \lambda = 0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες .

Β. Να βρεθεί η πιθανότητα η εξίσωση $\psi^2 - 8\psi + \lambda = 0$, λεΩ να έχει ρητές (πραγματικές) ρίζες στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείταιαπό απλά ενδεχόμενα με πιθανότητες ανάλογες των ενδείξεων τους , δηλαδήP(i) = ki, kεR, iεΩ.

Άσκηση 6 :

Από τους μαθητές ενός Λυκείου:

- Το 20% αυτών συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε.
- Το 85% δεν συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ε.Ε.Φ.
- Και το 8% συμμετέχει και στους δύο διαγωνισμούς

Επιλέγουμε τυχαία έναμαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Ε1. Γ: Ο μαθητής να μη συμμετέχει σε κανένα από τους δύο διαγωνισμούς .

Ε2. Δ: Ο μαθητής να συμμετέχει σ’ ένα μόνο διαγωνισμό .

Ε3. Ε: Ο μαθητής να συμμετέχει μόνο στο διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε.

Ε4. Ζ: Ο μαθητής να συμμετέχει το πολύ σ’ ένα διαγωνισμό.

Άσκηση 7 :

Έστω Α,Β, Γ είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω έτσιώστε

$A \cup B \cup \Gamma = \cup$, με Α,Γ ασυμβίβαστα.

Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν τα Β,Γ ταυτόχρονα είναι 0,2 , η πιθανότητα

να πραγματοποιηθούν τα Α,Β ταυτόχρονα είναι 0,4 , τα $A \cap B'$, $B' \cap \Gamma$ ισοπίθανα

και $P(A') = 0,5$ τότε:

Α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α,Β, Γ .

Β. Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το Β .

Γ. Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το Α ή μόνο το Β .

Άσκηση 8 :

Από τους 216 μαθητές ενός Λυκείου, 27 μαθητές μαθαίνουν μόνο Γερμανικά, 54 μαθητές μαθαίνουν μόνο Γαλλικά και 108 μαθητές δεν μαθαίνουν ούτε Γερμανικά ούτε Γαλλικά. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:

α) Να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις δύο αυτές γλώσσες.

β) Να μαθαίνει Γερμανικά.

γ) Να μαθαίνει Γαλλικά.

δ) Να μαθαίνει Γερμανικά και Γαλλικά.

ε) Να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο αυτές γλώσσες.

στ) Να μαθαίνει το πολύ μία από τις δύο αυτές γλώσσες.

Άσκηση 9 :

Σε μια πόλη το 65% των κατοίκων δεν έχουν αυτοκίνητο, το 80% δεν έχουν μηχανάκι και το 25% έχουν μόνο αυτοκίνητο. Επιλέγουμε τυχαία ένα κάτοικο. Να βρείτε την πιθανότητα:

α) Να έχει αυτοκίνητο και μηχανάκι.

β) Να έχει αυτοκίνητο ή μηχανάκι.

γ) Να μην έχει ούτε αυτοκίνητο ούτε μηχανάκι.

δ) Να έχει μόνο μηχανάκι.

ε) Να έχει ή αυτοκίνητο ή μηχανάκι.

Άσκηση 10 :

Έστω ένας τριψήφιος αριθμός 24ψ. Επιλέγουμε τυχαία το ψηφίο των μονάδων. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) «ο αριθμός διαιρείται με το 3 και με το 5»

β) «ο αριθμός διαιρείται με έναν τουλάχιστον από τους αριθμούς 3 και 5»

γ) «ο αριθμός διαιρείται μόνο με το 3»

δ) «ο αριθμός διαιρείται μόνο με έναν από τους αριθμούς 3 και 5»

ε) «ο αριθμός δεν διαιρείται ούτε με το 3 ούτε με το 5»

στ) «ο αριθμός διαιρείται με έναν το πολύ από τους αριθμούς 3 και 5»