1.4. Συνδυαστική & Πιθανότητες

Διδακτικοί στόχοι

- Εφαρμογές της βασικής αρχής απαρίθμησης
- Συνδυασμοί διατάξεων με ή χωρίς επαναλήψεις
- Μεταθέσεις και χρήση του παραγοντικού
- Προβλήματα συνδυαστικής

Θεωρία και Μεθοδολογία

➢ Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διαδοχικές φάσεις (ή επιλογές) φ_1,φ_2,…,φ_ω . Αν η φ_1 μπορεί να πραγματοποιηθείμε κ_1 τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φ_2 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_2 τρόπους,…, και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φ_ν μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_ν τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\boldsymbol{\kappa_1 \cdot\ \kappa_2 \cdot \ldots \cdot \kappa_\nu}$ τρόπους.

Εφαρμογή 1:Ρίχνω ένα κέρμα 3 φορές. Τα δυνατά αποτελέσματα των 3 ρίψεων είναι:

$$2*2*2 = 2^3 = 8 .$$

Διατάξεις

Διάταξη των ν στοιχείωνενός συνόλου Α ανά κ, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμενα τοποθετήσουμε στοιχεία του Α σε μια σειρά κ θέσεων επιτρέποντας επαναλήψεις. Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ είναι ίσο με $\boldsymbol{\nu^{\kappa}}$.

Εφαρμογή2: Ρίχνω ένα κέρμα 10 φορές. Κάθε δυνατό αποτέλεσμα είναι μία διατεταγμένη 10-άδα από τα στοιχεία του συνόλου {Κ, Γ}.

Άρα έχουμε διάταξη των 2 ανά 10 . Τοπλήθος των διατάξεων των 2 ανά 10 είναι ίσο με 2^{10}.

Διατάξεις χωρίς επαναλήψεις

Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ χωρίς επανάληψη, με κ ≤ ν, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε κ στοιχεία του Α και να τα βάλουμε σε σειρά.Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ χωρίς επαναλήψεις με κ ≤ ν συμβολίζεται με $(\nu)_\kappa$και είναι ίσο με: **ν·(ν - 1)·...· (ν - κ + 1)**

Εφαρμογή3 :Το πενταμελές μαθητικό συμβούλιο της τάξης σας συνεδριάζει για να εκλέξει 3 διαφορετικά άτομα ως πρόεδρο, γραμματέα και ταμία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η εκλογή;

Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί ένας μαθητής να εκλεγείσε πάνω από μία θέση (π.χ. πρόεδρος και γραμματέας), άρα το πλήθος των διαφορετικών τρόπων είναι μικρότερο από το πλήθος των διατάξεων των 5 ανά 3.

Η διαδικασία εκλογής μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις:

- 1η φάση: Η εκλογή προέδρου
- 2η φάση: Η εκλογή γραμματέα
- 3η φάση: Η εκλογή ταμία

Η 1η φάση μπορεί να γίνει με 5 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη τουπενταμελούς. Η 2η φάση μπορεί να γίνει με 4 τρόπους, όσα είναι και ταμέλη του πενταμελούς που απέμειναν ύστερα από την εκλογή του προέδρου. Η 3η φάση μπορεί να γίνει με 3 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη τουπενταμελούς που απέμειναν ύστερα και από την εκλογή του γραμματέα.

Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος τωνδιαφορετικών δυνατών τριάδων είναι $5{\cdot}4{\cdot}3 = 60$. Κάθε τέτοια τριάδα ονομάζεται διάταξη των 5 ανά 3 χωρίς επαναλήψεις.

➢ Μεταθέσεις

Μετάθεση των V στοιχείων ενός συνόλου Α, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς

τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τα βάλουμε σε σειρά. Το πλήθος των μεταθέσεων ν

στοιχείων είναι: $\mathbf{\nu \cdot (\nu - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$

Εφαρμογή4:θέλουμε να βρούμετο πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορούν να καθίσουν 5 θεατές μίας θεατρικής παράστασης, που μόλις μπήκαν στο θέατρο, στις 5 τελευταίες κενές θέσεις. Σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης οι διαφορετικοί τρόποι είναι $5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 120$, καθώς ο πρώτος που θα καθίσει έχει 5 επιλογές, ο δεύτερος έχει 1 λιγότερη επιλογή, δηλαδή 4, ο τρίτοςέχει 3 επιλογές, ο τέταρτος 2 επιλογές και ο πέμπτος 1 επιλογή. Κάθε διαφορετικός τρόπος να καθίσουν είναι μία μετάθεση 5 στοιχείων.

Σημείωση: Παραγοντικό

Το γινόμενο των φυσικών αριθμών 1, 2, 3,…..,ν-1, ν συμβολίζεται ως **ν!** και διαβάζεται «ν παραγοντικό». Είναι: **ν! =1·2· 3·…..· (ν-1) ·ν**. Για παράδειγμα: 5! = 5·4·3·2·1 .

Εξ΄ ορισμού είναι: **0! = 1**

Άρα:

- Το πλήθος των μεταθέσεων ν στοιχείων είναι ν!
- Με αυτόν τον συμβολισμό, το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ χωρίς επαναλήψεις είναι: $(\nu)_\kappa = \frac{(\nu)!}{(\nu-\kappa)!}$

➢ **Συνδυασμοί**

Συνδυασμός των nστοιχείων ενός συνόλου Α ανά k λέγεται κάθε υποσύνολο του Α με k στοιχεία. Για το πλήθος των συνδυασμών των n ανά k ισχύει:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{, όπου } \mathbf{n \geq k}$$

διαφορετικά είναι αδύνατο καθώς δεν υφίσταται αρνητικό παραγοντικό ενός αριθμού.

Ισχύει επίσης:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1 :

Σε μία τάξη υπάρχουν ακριβώς 25 καρέκλες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπουςμπορούν να καθίσουν σε αυτές οι 25 μαθητές/τριες μιας τάξης;

Λύση :

Κάθε τρόπος είναι μία μετάθεση των 25 μαθητών/τριών. Άρα οι διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν είναι πλήθους 25!

Άσκηση 2 :

Μία τράπουλα έχει 52 διαφορετικά φύλλα. Αν ανακατέψουμε την τράπουλα καιανοίξουμε τα 4 πρώτα φύλλα, ποια είναι η πιθανότητα αυτά να είναι άσοι;

Λύση :

Πρώτα θα υπολογίσουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε σειρά (δηλαδή να μετατεθούν) τα 52 φύλλα μετά το ανακάτεμα. Πρόκειται για μεταθέσεις 52 στοιχείων, άρα το πλήθος είναι 52!. Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι τα 4 πρώτα φύλλα είναι άσοι. Πρώταυπολογίζουμε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που έχουν μετατεθεί τα

υπόλοιπα 48 φύλλα. Αυτό είναι ίσο με 48!. Όμως για κάθε έναν από αυτούς τους 48! τρόπους, υπάρχουν 4! τρόποι ναεμφανιστούν οι 4 άσοι, που είναι πρώτοι, πριν τα 48 φύλλα.

Συνεπώς, από τη **βασική αρχή απαρίθμησης** το πλήθος των διαφορετικώντρόπων να εμφανιστούν πρώτα οι 4 άσοι είναι:

$$(\text{μεταθέσεις 4 στοιχείων})\cdot(\text{μεταθέσεις 48 στοιχείων}) = 4!\cdot 48!$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε το πείραμα τύχης «ανακατεύουμε μία συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων» το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων (δηλαδή των δυνατών μεταθέσεων των φύλλων της τράπουλας) είναι 52!. Θεωρούμε επίσης ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.

Έστω το ενδεχόμενο Α: «*ανοίγουμε τα 4 πρώτα φύλλα της τράπουλας και αυτά είναι άσοι»,* τότε το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 4!·48.

Άρα από τον κλασικό ορισμό: P(A) = $\frac{4!*48!}{52!} = \frac{4!*48!}{52*51*50*49*48!} = \frac{4!}{52*51*50*49}$

Άσκηση 3 :

Το πενταμελές συμβούλιο του σχολείου αποτελείται από 4 κορίτσια και 1 αγόρι. Πρόκειται να επιλεγούν, με κλήρωση, 3 από τα 5 μέλη του συμβουλίου για να εκπροσωπήσουν την τάξη τους σε μία ενημερωτική συνάντηση με τους καθηγητές τους. Ποια είναι η πιθανότητα και τα 3 μέλη που θα επιλεγούν να είναι κορίτσια;

Λύση :

Θεωρούμε το πείραμα τύχης: «Επιλέγουμε τυχαία 3 από τα 5 μέλη του πενταμελούς». Η σειρά επιλογής (ποιος/α θα επιλεγεί πρώτος/η, δεύτερος/η και τρίτος/η) δεν έχει σημασία.
Οι τρόποι επιλογής είναι το πλήθος των συνδυασμών των 5 ανα 3, δηλαδή:

$$\binom{5}{3} = 10$$

Αυτό είναι και το πλήθος των αποτελεσμάτων του δ.χ. Ω του πειράματος τύχης (και αν η κλήρωση είναι δίκαια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ισοπίθανα). Θεωρούμε ως Α το ενδεχόμενο του Ω: «επιλέγονται μόνο κορίτσια». Τότε τοπλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων του Α είναι το πλήθος των συνδυασμώντων 4 ανά 3. Πράγματι, εξαιρώντας το αγόρι, τότε μένει να βρούμε με πόσουςτρόπους επιλέγονται 3 από τα 4 κορίτσια.

Από την ισότητα:

$$\binom{4}{3}\cdot 3! = \frac{4!}{(4-3)!}$$

προκύπτει ότι:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4\cdot 3!}{3!\cdot 1!} = 4$$

Άρα, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας:P(A)= $\frac{4}{10}$ =0,4.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 :

Σε ένα πρωτάθλημα συμμετέχουν 6 ομάδες και αγωνίζονται όλες με όλες μίαφορά. Να υπολογίσετε πόσοι αγώνες θα γίνουν.

Άσκηση 2 :

α) Από ένα σύνολο 9 μαθητών επιλέγουμε 4 μαθητές τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν συγκεκριμένο μαθητή;

β) Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα αν έχουμε ένα σύνολο ν μαθητών και επιλέγουμε, τυχαία, κ μαθητές.

Άσκηση 3 :

Από ένα σύλλογο καθηγητών με 6 άνδρες και 5 γυναίκες επιλέγουμε τυχαία 3 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) τα άτομα να είναι γυναίκες,

β) ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας,

γ) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.

Άσκηση 4 :

Ένα κουτί περιέχει 18 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 4 είναιελαττωματικές. Από ένα σύστημα ελέγχου ποιότητας επιλέγονται τυχαία 3ασφάλειες και δοκιμάζονται. Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως μη αποδεκτό. Να βρείτε την πιθανότητα να επιστραφεί ως μη αποδεκτό ένα κουτί που έχει 4 ελαττωματικές ασφάλειες.

Άσκηση 5 :

Έχετε δύο σύμβολα το X και I. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορείτενα σχηματίσετε χρησιμοποιώντας 4 φορές το I και 3 φορές το X; Π.χ. μία συμβολοσειρά είναι η XIIXIIX. Αν κάποιος επιλέξει τυχαία μία τέτοια σειρά,ποια είναι η πιθανότητα το 1ο σύμβολο από αριστερά να είναι X;

Άσκηση 6 :

Για δύο φυσικούς αριθμούς κ και ν με κ ≤ ν, να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa}$$

Άσκηση 7 :

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα γράμματα Α, Ε, Ε, Θ, Ι,Υ το ένα μετά από το άλλο; Ποια είναι η πιθανότητα, αν τοποθετήσουμε τα γράμματα σε τυχαία σειρά, να σχηματιστεί η λέξη «*ΕΥΘΕΙΑ*»;

Άσκηση 8 :

Αν κάποιος διαθέτει 2 μπουφάν (ένα μαύρο κι ένα μπλε), 4 παντελόνια, 3μπλούζες, 10 ζευγάρια κάλτσες και 3 ζευγάρια παπούτσια, με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη; Αν ένας επιλέξει τυχαία έναν απόαυτούς τους τρόπους για να ντυθεί φορώντας ένα μπουφάν, ένα παντελόνι, μία μπλούζα, ένα ζευγάρι κάλτσες και ένα ζευγάρι παπούτσια, ποια είναι ηπιθανότητα να φοράει το μπλε μπουφάν;

Άσκηση 9 :

Αν ρίξουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 5 φορές ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 5 διαφορετικά αποτελέσματα;

Άσκηση 10 :

α) Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να κατασκευάσουμε πουπεριέχουν στη σειρά τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό;

β) Από το σύνολο των πινακίδων που περιγράφονται στο ερώτημα (α), μπορούν να χρησιμοποιηθούν εκείνες που τα γράμματά τους ανήκουν και στο λατινικό αλφάβητο. Αν επιλέξουμε τυχαία μία πινακίδα του ερωτήματος, (α) ποια είναι η πιθανότητα να είναι κατάλληλη προς χρήση;

Άσκηση 11 :

Ο Θανάσης, ο Μιχάλης, ο Κώστας, ο Αντρέι κι ο Δημήτρης είναι οι παίκτες της σχολικής ομάδας μπάσκετ των αγοριών του Γ1 και ο προπονητής της ομάδας πρόκειται να τους δώσει τις εμφανίσεις τους για τους σχολικούς αγώνες.

α) Οι διαθέσιμες εμφανίσεις έχουν τυπωμένα τα νούμερα 7, 13, 15, 20 και27. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν οι εμφανίσεις στους μαθητές; Αν οι εμφανίσεις μοιραστούν τυχαία στους παίκτες, ποια είναιη πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7; Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7 και να μην πάρει οΘανάσης τη φανέλα με το 13;

β) Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα, εάν οι διαθέσιμες εμφανίσεις είναι οι 7,11, 13, 15, 19, 20 και 27.

Άσκηση 12 :

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 3 άτομα σε 7 θέσεις μιας σειράς; Ποια είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να μείνει κενή;

Άσκηση 13 :

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Αν επιλέξουμε τη σειρά των 7 παιδιών τυχαία, ποια είναι ηπιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;

Άσκηση 14 :

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «*τέσσερα άτομα, να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους*».

Άσκηση 15 :

Δέκα παιδιά, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαίαο ένας δίπλα στον άλλον σε δέκα θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστακαι η Ελένη να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;

Άσκηση 16 :

Στο τυχερό παιχνίδι του ΠΡΟΠΟ συμπληρώνουμε καθεμιά από τις 13 θέσεις με ένα από τα στοιχεία 1, 2, Χ που αντιστοιχούν σε πρόβλεψη: νίκης της γηπεδούχου ομάδας (1), νίκης της φιλοξενούμενης ομάδας (2), ισοπαλίας (Χ).

i) Να προσδιοριστεί το πλήθος των διαφορετικών στηλών που μπορούμενα συμπληρώσουμε.

ii) Αν συμπληρώσουμε τυχαία μια στήλη ΠΡΟΠΟ, να βρεθούν οι πιθανότητες των ακόλουθων ενδεχομένων:

Α: «*να πιάσουμε ακριβώς 12 αγώνες*» Β: «*να πιάσουμε ακριβώς 11 αγώνες*»

Άσκηση 17 :

Στο τυχερό παιχνίδι του ΛΟΤΤΟ "6 από 49", αν παίξουμε μια στήλη, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: «*να πετύχουμε 4 ακριβώς σωστά νούμερα*»;

Άσκηση 18 :

Ποια είναι η πιθανότητα μεταξύ κ μαθητών (κ ≤ 365) δύο τουλάχιστοννα έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; (Ο χρόνος υπολογίζεται με 365 μέρες).

Άσκηση 19 :

Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 φτιάχνουμε τετραψήφιους αριθμούς στους οποίους το κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερο από μία φορά. Αν πάρουμε τυχαία έναν τέτοιο αριθμό, ποια είναι η πιθανότητα να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά;

Άσκηση 20 :

Από το σύνολο των μεταθέσεων των στοιχείων 1, 2, 3, …, ν επιλέγουμε τυχαίως μία. Να βρείτε ποια είναι η πιθανότητα «*η μετάθεση των εν λόγω στοιχείων να μην αρχίζει από 1*».

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 :

Ο υπάλληλος ενός χώρου στάθμευσης δίνει τυχαία τα τρία κλειδιά αυτοκινήτων στους τρεις κατόχους των αυτοκινήτων αυτών. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: «*Κάθε οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί*»

Β: «*Μόνο ένας οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί*»

Γ: «*Κανένας οδηγός να μην πάρει το δικό του κλειδί*»

Άσκηση 2 :

Από μια τάξη στην οποία φοιτούν 10 κορίτσια και 12 αγόρια επιλέγονταιστην τύχη τρία άτομα για να εκπροσωπήσουν την τάξη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «*τα επιλεγμένα άτομα να είναι του ίδιου φύλου*».

Άσκηση 3 :

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε τουλάχιστον ένα «έξι» σε 4 ρίψεις ενός ζαριού και να τη συγκρίνετε με την πιθανότητα ναφέρουμε τουλάχιστον μια φορά «εξάρες» σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.

Άσκηση 4 :

Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 . Στην ε_1 ορίζουμε 10 σημεία και στην ε_2 20 σημεία. Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά; Ανεπιλέξουμε τυχαίως ένα τέτοιο τρίγωνο, ποια είναι η πιθανότητα να έχειμία πλευρά του στην ε_1 ;

Άσκηση 5 :

Με πόσους τρόπους μπορούμε να κρεμάσουμε 3 κορνίζες σε 3 καρφιά;

Άσκηση 6 :

Πόσους 5-ψήφιους μπορούμε να γράψουμε, αν θέλουμε:

- Να έχουν διαφορετικό ψηφίο την κάθε φορά
- Κάθε ψηφίο από μία φορά και ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιος του 5
- Κάθε ψηφίο από μία φορά και να ξεκινούν από 1 ή 2
- Όλοι οι 5-ψηφιοι

Άσκηση 7 :

Στη Eurovision παίρνουν μέρος 20 χώρες . Με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν οι 3 πρώτες θέσεις;

Άσκηση 8 :

Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από μια τράπουλα 52 φύλλων, 6 διαφορετικά μεταξύ τους φύλλα;

Άσκηση 9 :

Πρέπει να απαντήσεις σωστά σε 1 από τις 2 θεωρίες του διαγωνίσματος και σε 2 από τις 3 ασκήσεις. Πόσες επιλογές έχεις συνολικά;

Άσκηση 10 :

Από μια τάξη με 8 αγόρια και 12 κορίτσια επιλέγουμε στην τύχη 3 άτομα.

α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή ;

β) Ποια η πιθανότητα τα επιλεγμένα άτομα να είναι του ίδιου φύλου ;