2.3. Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας, θηκόγραμμα, συντελεστής μεταβλητότητας

Διδακτικοί στόχοι

- Τι σημαίνει μέση τιμή χ και τι διακύμανση
- Τι είναι τεταρτημόριο,ενδοτεταρτημοριακό εύρος και τη επικρατούσα τιμή
- Τι ορίζεται ως τυπική απόκλιση,διακύμανση, συντελεστής μεταβλητότητας και ποιες οι σχέσεις μεταξύ τους

Θεωρία και Μεθοδολογία

- **Μέση τιμή** $\bar{x}$

Η **μέση τιμή** $\bar{x}$ ενός συνόλου ν παρατηρήσεων ορίζεται, ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους τους.

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_\nu}{\nu}$$

Εφαρμογή 1:

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε δέκα μαθήματα είναι: 18, 17, 19, 17, 18, 16, 18, 17, 16, 18, τότε:

$$\bar{x} = \frac{18+17+19+17+18+16+18+17+16+18}{10} = \frac{174}{10} = 17,4$$

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι χ_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i, τότε:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot \nu_1 + x_2 \cdot \nu_2 + \ldots + x_\kappa \cdot \nu_\kappa}{\nu}$$

Εφαρμογή 2:

Για το παράδειγμα με τους βαθμούς του μαθητή στα δέκα μαθήματα έχουμε:

$$\overline{x} = \frac{16 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 18 \cdot 4 + 19 \cdot 1}{10} = \frac{174}{10} = 17{,}4$$

- **Διάμεσος δ**

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Εφαρμογή 3:

Για το παράδειγμα με τους βαθμούς του μαθητή στα δέκα μαθήματα, αν τους διατάξουμε σε αύξουσα σειρά, έχουμε: 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 19. Επομένως:

δ = $\frac{17+18}{2} = 17{,}5$.

Αν έχουμε τις παρατηρήσεις 4, 4, 5, 5, 6, 7, 39 σε αύξουσα σειρά, τότε η διάμεσος είναι δ = 5.

Σημείωση: Το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες και το πολύ 50% είναι μεγαλύτερες από τη διάμεσο δ.

➢ Τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 , Q_3

Όπως ορίσαμε τη διάμεσο δ, έτσι ώστε το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες του δ και το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μεγαλύτερες του δ, μπορούμε ανάλογα να ορίσουμε και τα εκατοστημόρια $P_κ$, k =1, 2, ..., 99. Ειδική περίπτωση εκατοστημορίων είναι τα P_{25}, P_{50}, P_{75}, τα οποία καλούνται **τεταρτημόρια** και συμβολίζονται με Q_1 , Q_2 και Q_3 αντίστοιχα.

- Για το Q_1 έχουμε αριστερά το πολύ 25% και δεξιά το πολύ 75% των παρατηρήσεων.
- Για το Q_2 έχουμε Q_2 = δ, δηλαδή συμπίπτει με τη διάμεσο.
- Για το Q_3 έχουμε αριστερά το πολύ 75% και δεξιά το πολύ 25% των παρατηρήσεων.

Για τον ευκολότερο υπολογισμό των Q_1 και Q_3 έχουμε:

- ❖ Όταν το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, διακρίνουμε το πρώτο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_1 και το δεύτερο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_3.
- ❖ Όταν το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, αφαιρούμε από το δείγμα τη διάμεσο και διακρίνουμε το πρώτο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_1 και το δεύτερο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_3.

Εφαρμογή 4:

Για το παράδειγμα με τους βαθμούς του μαθητή στα δέκα μαθήματα, έχουμε:

Q_1 = 17, Q_2 = δ =17,5, Q_3 = 18 .

Επικρατούσα τιμή M_0

Είναι η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Η επικρατούσα τιμή μπορεί να μην είναι μοναδική. Όταν όλες οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή.

Εφαρμογή 5:

Για το παράδειγμα με τους βαθμούς του μαθητή στα δέκα μαθήματα, έχουμε επικρατούσα τιμή είναι M_0 = 18.

Εύρος R

Είναι το απλούστερο από τα μέτρα διασποράς και ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης x_{min} παρατήρησης από τη μέγιστη x_{max} παρατήρηση. Δηλαδή:

$$R = \text{μέγιστη παρατήρηση} - \text{ελάχιστη παρατήρηση} = x_{max} - x_{min} .$$

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q

Είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3. Δηλαδή:

$$Q = Q_3 - Q_1 .$$

Ακραίες τιμές

Είναι οι παρατηρήσεις που βρίσκονται έξω από το διάστημα $[Q_1 - 1{,}5 * Q , Q_3 + 1{,}5 * Q]$.

Σημείωση: Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης το οποίο δεν επηρεάζεται από το μέγεθος των ακραίων τιμών. Το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι πολύ απλά μέτρα διασποράς και δεν εκφράζουν την απόκλιση που έχει κάθε παρατήρηση από το «κέντρο» των παρατηρήσεων.

➢ Διακύμανση s^2

Είναι η μέση τιμή των τετραγώνων των διαφορών της μέσης τιμής των παρατηρήσεων από τις παρατηρήσεις. Δηλαδή:

$$s^2 = \frac{(t_1 - \overline{x})^2 + (t_2 - \overline{x})^2 + (t_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (t_\nu - \overline{x})^2}{\nu}$$

Η διακύμανση δεν εκφράζεται με τις μονάδες που εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Εφαρμογή 6:

Οι βαθμοί έξι μαθητών στα Μαθηματικά είναι: 18, 15, 18, 18, 15, 18, τότε:

$$\overline{x} = \frac{18+15+18+18+15+18}{6} = \frac{102}{6} = 17 \text{ και}$$

$$s^2 = \frac{(18-17)^2 + (15-17)^2 + (18-17)^2 + (18-17)^2 + (15-17)^2 + (18-17)^2}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι x_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i, τότε:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 \cdot \nu_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot \nu_2 + \ldots + (x_\kappa - \overline{x})^2 \cdot \nu_\kappa}{\nu}$$

Σχετικός είναι ο πίνακας:

x_i	ν_i	$x_i \cdot \nu_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 \cdot \nu_i$
15	2	30	-2	4	8
18	4	72	1	1	4
Σύνολο	6	102			12

$$\overline{x} = \frac{102}{6} = 17 \quad \text{και} \quad s^2 = \frac{12}{6} = 2$$

Τυπική απόκλιση s

Είναι η τεραγωνική ρίζα της διακύμανσης . Δηλαδή: s = $\sqrt{s^2}$.

Η τυπική απόκλιση έχει το πλεονέκτημα ότι εκφράζεται με τις μονάδες, που εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Εφαρμογή 7:

Στο παραπάνω παράδειγμα είναι: s = $\sqrt{2}$ ≈1,41.

Θηκόγραμμα

Είναι ένας βολικός τρόπος γραφικής απεικόνισης πέντε αριθμητικών δεδομένων μιας σειράς παρατηρήσεων: της μικρότερης παρατήρησης του πρώτου τεταρτημόριου (Q_1), της διαμέσου (δ) του τρίτου τεταρτημόριου (Q_3), και της μεγαλύτερης παρατήρησης. Το **θηκόγραμμα** δείχνει διαφορές μεταξύ των πληθυσμών. Οι αποστάσεις μεταξύ των διαφόρων τμημάτων του θηκογράμματος βοηθούν να φανεί το μέγεθος της διασποράς και η ασυμμετρία των δεδομένων.

Εφαρμογή 8:

Έστω ότι έχουμε τον αριθμό των εργαζομένων σε 20 βιοτεχνίες.

10 14 25 7 31 8 12 19 10 24 9 13 5 28 24 19 26 51 68 14.

Κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

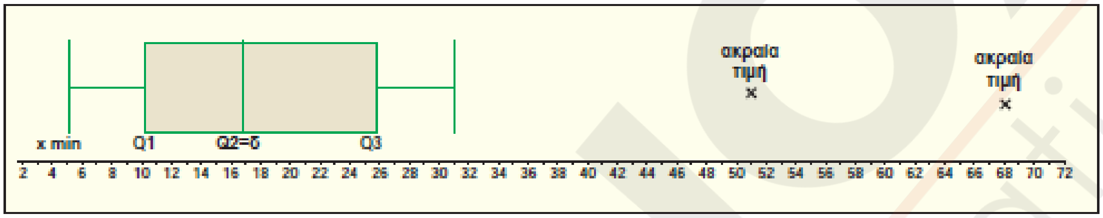
5, 7, 8, 9, 10, 10, 12, 13, 14, 14, 19, 19, 24, 24, 25, 26, 28, 31, 51, 68

Είναι: Q = $\frac{10+10}{2}$ = 5 , Q_2 = δ = $\frac{14+19}{2}$ = 16,5 , Q_3 = $\frac{25+26}{2}$ = 25,5

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι: Q = 25,5 - 10 = 15,5 και 1,5 * Q = 23,25 .

Επομένως [Q_1 -1,5 * Q , Q_3 +1,5 * Q] = [-13,25 , 48,75] . Οπότε ακραίες παρατηρήσεις είναι το 51 και το 68.

Τα μέτρα αυτά απεικονίζονται στο επόμενο διάγραμμα.



Μεθολογία δημιουργίας θηκογράμματος:

1) Από τα μέσα των πλευρών, που παριστάνουν το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο (δηλαδή τα Q_1 και Q_3 αντιστοίχως) φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος που προσδιορίζεται ως εξής:
2) Η μικρότερη παρατήρηση που είναι μεγαλύτερη του Q_1-1,5*Q είναι το 5, επομένως το αριστερό άκρο του τμήματος που θα φέρουμε από το Q_1 είναι το 5 και δεν υπάρχουν παρατηρήσεις μικρότερες του Q_1-1,5*Q για να σημειωθούν χωριστά.
3) Η μεγαλύτερη παρατήρηση που είναι μικρότερη του Q_3+1,5*Q είναι η 31, επομένως το δεξί άκρο του τμήματος που θα φέρουμε από το Q_3 είναι το 31 και θα σημειώσουμε χωριστά τις ακραίες τιμές 51 και 68 οι οποίες είναι μεγαλύτερες του Q_3+1,5*Q .

Συντελεστής Μεταβλητότητας CV

Είναι η διαίρεση της τυπικής απόκλισης με τη μέση τιμή . Αν η μέση τιμή είναι <0 , τότε χρησιμοποιούμε την απόλυτη μέση τιμή.

Άρα:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\overline{x}}$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι καθαρός αριθμός και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό.

Ανάμεσα σε 2 συντελεστές μεταβλητότητας, προτιμάμε τον μικρότερο, γιατί υποδηλώνει ότι έχουμε περισσότερη ομοιογένεια στις τιμές της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει.

Εφαρμογή 9:

Δυο όμιλοι επιχειρήσεων, που ο καθένας αποτελείται από 5 επιχειρήσεις, είχαν ετήσιες δαπάνες για το οικονομικό έτος 2017 τα ποσά, σε χιλιάδες ευρώ, που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

Οι μέσες τιμές των δαπανών για κάθε όμιλο είναι:

$$\overline{x}_A = \frac{200+250+300+300+350}{5} = 280 \text{ χιλιάδες ευρώ.}$$

$$\overline{x}_B = \frac{5.000+5.050+5.100+5.100+5.100+5.150}{5} = 5.080 \text{ χιλιάδες ευρώ.}$$

Οι διακυμάνσεις των δαπανών για κάθε όμιλο είναι:

$$s_A^2 = \frac{(200-280)^2+(250-280)^2+(300-280)^2+(300-280)^2+(350-280)^2}{5}$$

$$s_A^2 = 2.600$$

$$s_B^2 = \frac{(5.000-5.080)^2+(5.050-5.080)^2+(5.100-5.080)^2+(5.100-5.080)^2+(5.150-5.080)^2}{5}$$

$$s_B^2 = 2.600$$

Οι τυπικές αποκλίσεις των δαπανών για κάθε όμιλο είναι ίσες με:

$$s_A = s_B = \sqrt{2600} \approx 51 \text{ χιλιάδες ευρώ.}$$

Μπορούμε άραγε να ισχυριστούμε ότι οι 51 χιλιάδες ευρώ των ίσων τυπικών αποκλίσεων έχουν την ίδια βαρύτητα για τους ομίλους Α και Β, που έχουν διαφορετικές μέσες τιμές

x_A = 280 χιλιάδες ευρώ και x_B = 5.080 χιλιάδες ευρώ;

Ένας τέτοιος ισχυρισμός θα ήταν λανθασμένος, γιατί η σχέση τιμών της μεταβλητής «ετήσιες δαπάνες» με την τιμή της τυπικής απόκλισης, είναι διαφορετικές για τις επιχειρήσεις των δυο ομίλων.

Ένα μέτρο, που μας βοηθάει να αντιμετωπίσουμε τέτοια προβλήματα και μας δίνει τη δυνατότητα συγκρίσεων, είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας CV. Ο συντελεστής μεταβλητότητας για τις δυο επιχειρήσεις είναι:

$$CV_A = \frac{51}{280} \approx 0{,}1821 = 18{,}21\% \quad \text{και} \quad CV_B = \frac{51}{5080} \approx 0{,}01004 = 1{,}00\% .$$

Όσο μικρότερο είναι το ποσοστό αυτό, τόσο περισσότερη ομοιογένεια υπάρχει στις τιμές της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει. Έχουμε $CV_A > CV_B$, επομένως η διασπορά των τιμών στον όμιλο Α σε σχέση με τη μέση τιμή είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διασπορά στον όμιλο Β.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1 :

Μία ομάδα δέκα μαθητών μέτρησε το μήκος ενός θρανίου με ακρίβεια δέκατου του εκατοστού του μέτρου (χιλιοστού του μέτρου). Οι μαθητές χρησιμοποίησαν την ίδια μετροταινία και κατέγραψαν τις τιμές των δέκα μετρήσεων, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Μήκος σε cm	120,2	120,1	120,1	119,8	119,7	120,3	120,2	119,9	120,1	119,8

1) Να αναφέρετε δύο λόγους που, κατά τη γνώμη σας, δικαιολογούν τις διαφορές στις μετρήσεις του θρανίου.

2) Πώς υπολογίζουμε τη μέση τιμή των μετρήσεων;

3) Ποια είναι η τιμή του μήκους του θρανίου που θα χρησιμοποιήσουμε;

4) Για ποιον λόγο είναι χρήσιμος ο υπολογισμός της μέσης τιμής πολλών μετρήσεων;

5) Δικαιολογήστε με παράδειγμα που θα δημιουργήσετε από τις τιμές του πίνακα- γιατί ζητήθηκε από τους μαθητές να κάνουν δέκα μετρήσεις και όχι λιγότερες (π.χ. τρεις μετρήσεις).

Λύση :

1) Δύο λόγοι που δικαιολογούν τις διαφορές μπορεί να είναι:

a) Η αρχή της μετροταινίας δε συμπίπτει με την αρχή της μετρούμενης απόστασης
b) Η μετροταινία δεν ακολουθεί ευθεία και παράλληλη γραμμή προς τη μετρούμενη απόσταση.

2) Για τη μέση τιμή των μετρήσεων έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{120,2+120,1+120,1+119,8+119,7+120,3+120,2+119,9+120,1+119,8}{10}$$

$$= \frac{1200,2}{10} = 120,02$$

3) Για την άγνωστη τιμή του μήκους του θρανίου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέση τιμή x =120,02 cm του δείγματος.

4) Θέλουμε τη μέση τιμή πολλών μετρήσεων, δηλαδή θέλουμε μεγάλο μέγεθος δείγματος, ώστε το αποτέλεσμα να έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να προσεγγίσει ικανοποιητικά το πραγματικό μήκος του θρανίου.

5) Αν για παράδειγμα πάρουμε τη μέση τιμή των τριών πρώτων μετρήσεων έχουμε:

$$\bar{x}' = \frac{120,2+120,1+120,1}{3} = \frac{360,4}{3} = 120,133...\text{ cm}$$

Αυτή είναι η μέση τιμή ενός άλλου δείγματος. Το μήκος όμως του θρανίου είναι μοναδικό. Το μεγαλύτερο μέγεθος του δείγματος μας δίνει τη δυνατότητα ακριβέστερης εκτίμησης του πραγματικού μήκους.

Άσκηση 2 :

Η μέση τιμή των μηνιαίων μισθών των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι 1.200 ευρώ και η τυπική απόκλιση 100 ευρώ.

1) Αν γίνει μια κράτηση σε κάθε μηνιαίο μισθό κατά 50 ευρώ, τότε ποια μεταβολή επέρχεται στη μέση τιμή, στην τυπική απόκλιση και στον συντελεστή μεταβλητότητας των μισθών;

2) Αν γίνει μια κράτηση σε κάθε μηνιαίο μισθό κατά 5%, τότε ποια μεταβολή επέρχεται στη μέση τιμή, στην τυπική απόκλιση και στον συντελεστή μεταβλητότητας των μισθών;

Λύση :

Έστω ότι $t_1, t_2, t_3, \dots, t_\nu$ είναι οι μηνιαίοι μισθοί των υπαλλήλων της εταιρείας. Τότε:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_\nu}{\nu} = 1.200$$

$$s = \sqrt{\frac{(t_1 - 1.200)^2 + (t_2 - 1.200)^2 + \dots + (t_\nu - 1.200)^2}{\nu}} = 100$$

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{100}{1.200} \approx 8{,}33\%$$

1) Αν γίνει μια κράτηση σε κάθε μηνιαίο μισθό κατά 50 ευρώ, τότε:

$$\bar{y} = \frac{(t_1 - 50) + (t_2 - 50) + \dots + (t_\nu - 50)}{\nu} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_\nu}{\nu} - \frac{50 \cdot \nu}{\nu} = 1.200 - 50 = 1.150$$

$$s_y = \sqrt{\frac{(t_1 - 50 - 1.150)^2 + \dots + (t_\nu - 50 - 1.150)^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{(t_1 - 1.200)^2 + \dots + (t_\nu - 1.200)^2}{\nu}} = s = 100$$

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{100}{1.150} \approx 8{,}7\%$$

Επομένως:

- Η μέση τιμή x =1.200€ μειώνεται κατά 50€ και γίνεται y = 1.150 €
- Η τυπική απόκλιση δε μεταβάλλεται.
- Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV = 8,33% αυξάνεται και γίνεται CVy = 8,7%

2) Αν γίνει μια κράτηση σε κάθε μηνιαίο μισθό κατά 5%, τότε όλοι οι μηνιαίοι μισθοί πολλαπλασιάζονται με 0,95. Έτσι έχουμε:

$$\overline{z}=\frac{0{,}95\cdot t_1+0{,}95\cdot t_2+\ldots+0{,}95\cdot t_v}{v}=0{,}95\cdot\frac{t_1+t_2+\ldots+t_v}{v}=0{,}95\cdot 1200$$

$$\overline{z}=1.140$$

$$s_z=\sqrt{\frac{(0{,}95\cdot t_1-0{,}95\cdot\overline{x})^2+(0{,}95\cdot t_2-0{,}95\cdot\overline{x})^2+\ldots+(0{,}95\cdot t_v-0{,}95\cdot\overline{x})^2}{v}}$$

$$=\sqrt{0{,}95^2\cdot s^2}=|0{,}95|\cdot s=0{,}95\cdot 100=95$$

$$CV_z=\frac{s_z}{|\overline{z}|}=\frac{0{,}95\cdot s}{0{,}95\cdot\overline{x}}=CV=8{,}33\%$$

Επομένως:

- Η μέση τιμή x =1.200€ μειώνεται κατά 5% και γίνεται z =1.140€
- Η τυπική απόκλιση s = 100 € μειώνεται κατά 5% και γίνεται sz = 95 €
- Ο συντελεστής μεταβλητότητας δε μεταβάλλεται.

Άσκηση 3 :

Στην εθνική οδό Αθηνών - Λαμίας τα αυτοκίνητα τρέχουν με σταθερή ταχύτητα. Εμείς, με το δικό μας αυτοκίνητο, τρέχουμε με 100 Km/h και προσπερνάμε σε πλήθος όσα ακριβώς μας προσπερνούν. Να βρείτε τη διάμεσο των ταχυτήτων του δικού μας αυτοκινήτου και όλων όσων μας προσπέρασαν ή προσπεράσαμε στο ταξίδι μας αυτό.

Λύση :

Η διάμεσος είναι δ = 100 Km/h διότι το πολύ 50% των ταχυτήτων είναι μικρότερες και το πολύ 50% είναι μεγαλύτερες από 100 Km/h .

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 :

Σε μια κάλπη υπάρχουν άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες σε αναλογία 10%, 20%, 30% και 40% αντίστοιχα. Μια άσπρη μπάλα έχει βάρος 10 gr, μια μαύρη 11 gr, μια κόκκινη 12 gr και μια πράσινη 13 gr. Να βρείτε τη μέση τιμή του βάρους τους, αν γνωρίζουμε ότι στην κάλπη υπάρχουν:

1) 10 μπάλες.

2) 20 μπάλες.

3) Δε γνωρίζουμε πόσες μπάλες υπάρχουν στην κάλπη.

Άσκηση 2 :

Οι βαθμοί του Αντρέα σε 4 διαγωνίσματα στα Μαθηματικά ήταν 15, 18, 18, 17. Για τα ίδια διαγωνίσματα, ο Βασίλης είχε πάρει 2 μονάδες περισσότερες σε κάθε διαγώνισμα από τον Αντρέα, ενώ ο Γιάννης είχε πάρει 4 μονάδες λιγότερες από τον Αντρέα σε κάθε διαγώνισμα. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών του κάθε παιδιού.

Άσκηση 3:

Αν ο μέσος όρος του μηνιαίου μισθού των υπαλλήλων ενός εργοστασίου πέρυσι ήταν 850€ και φέτος σε κάθε υπάλληλο δοθεί αύξηση 50€, να βρείτε τον νέο μέσο όρο των μισθών.

Άσκηση 4:

Καθεμία από τις παρακάτω λίστες δεδομένων έχουν μέση τιμή 50.

(I) 0, 20, 40, 50, 60, 80, 100

(II) 0, 48, 49, 50, 51, 52, 100

(III) 0, 1, 2, 50, 98, 99, 100

1) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το εύρος για σύγκριση της μεταβλητότητας των δεδομένων αυτών;

2) Χωρίς να γίνουν οι πράξεις, να βρείτε σε ποια λίστα υπάρχει μεγαλύτερη και σε ποια μικρότερη διασπορά παρατηρήσεων.

Άσκηση 5:

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο για τα παρακάτω δείγματα δεδομένων και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα:

α) 1, 2, 6

β) 2, 4, 12

γ) 11, 12, 16

δ) 12, 14, 22

Άσκηση 6:

Να υπολογίσετε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση για καθεμιά από τις παρακάτω λίστες δεδομένων. Συγκρίνοντας τα δεδομένα και τα αποτελέσματα, τι συμπέρασμα βγάζετε;

α) 1, 3, 4, 5, 7

β) 3, 9, 12, 15, 21

γ) 6, 8, 9, 10, 12

δ) -1, -3, -4, -5, -7

Άσκηση 7:

Η βαθμολογία 16 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν: 8, 15, 13, 20, 9, 13, 17, 19, 20, 9, 10, 10, 15, 13, 14, 17. Να υπολογίσετε:

1) Τα τρία μέτρα θέσης: μέση τιμή, διάμεσο και επικρατούσα τιμή.

2) Το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβλητότητας.

Άσκηση 8:

Η μέση τιμή ηλικίας των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι 32 χρόνια. Ποια θα είναι η μέση τιμή ηλικίας των ίδιων υπαλλήλων ύστερα από τρία χρόνια;

Άσκηση 9:

Οι βαθμοί στα Μαθηματικά 20 μαθητών της Β΄ τάξης ενός Λυκείου είναι:

12	14	15	13	17	15	16	14	18	15	17	13	19	15	16	12	16	18	13	14

1) Να βρείτε τη μέση τιμή και την επικρατούσα τιμή.

2) Να βρείτε τη διάμεσο.

3) Να βρείτε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

4) Να σχεδιάσετε το θηκόγραμμα.

Άσκηση 10:

Η μέση επίδοση 17 αγοριών και 13 κοριτσιών στο μάθημα των Μαθηματικών μιας τάξης είναι 16,8. Η μέση επίδοση των κοριτσιών είναι 15,6. Να βρείτε τη μέση επίδοση των αγοριών.

Άσκηση 11:

Σε ένα Λύκειο υπάρχουν 500 μαθητές. Η Α΄ τάξη έχει 200 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 15,7 χρόνια, ενώ η Β΄ τάξη έχει 180 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 16,9 χρόνια. Οι υπόλοιποι μαθητές της Γ΄ τάξης έχουν μέσο όρο ηλικίας 17,7 χρόνια. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο ηλικίας όλων των μαθητών του σχολείου.

Άσκηση 12:

Η μέση τιμή 40 παρατηρήσεων είναι 20. Αν από αυτές οι 7 μειώνονται κατά 2 και οι 9 αυξάνονται κατά 6, να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

Άσκηση 13:

Η τυπική απόκλιση ενός δείγματος με ν παρατηρήσεις είναι ίση με μηδέν. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τις παρατηρήσεις;

Άσκηση 14:

Η μέση τιμή 6 διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 7,5. Να υπολογίσετε την τυπική τους απόκλιση

Άσκηση 15:

Αν σε μία τάξη ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_1 αγοριών είναι x και ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_2 κοριτσιών είναι y , να αποδείξετε ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας όλων των παιδιών της τάξης είναι:

$$\overline{z} = \frac{\nu_1\overline{x} + \nu_2\overline{y}}{\nu_1 + \nu_2}$$

Άσκηση 16:

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή είναι το άθροισμα των γινομένων των τιμών της μεταβλητής επί τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

Άσκηση 17:

Σε ένα εργοστάσιο με 100 εργαζόμενους η μέση τιμή των αμοιβών τους είναι 900€. Οι 40 από αυτούς πληρώνονται με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής και οι μισθοί τους έχουν μέση τιμή 800€. Αν οι αποδοχές των εργαζομένων με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής αυξηθούν και γίνουν όσο η μέση τιμή, τότε ποια θα είναι η νέα μέση τιμή των αμοιβών των 100 εργαζομένων;

Άσκηση 18:

a) Τι ορίζουμε ως μέση τιμή και τι ως διάμεσο;
b) Τι είναι τα τεταρτημόρια, η επικρατούσα τιμή και το εύρος R;
c) Ποια η σχέση του ενδοτεταρτημοριακού εύρους και των ακραίων τιμών;
d) Τι ορίζεται ως διακύμανση,τυπική απόκλιση,συντελεστής μεταβλητότητας και ποια η μεταξύ τους σχέση;

Άσκηση 19:

Βρείτε τη διάμεσο των ακόλουθων δεδομένων:

α) 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9

β) 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9, 9

Άσκηση 20:

a) Βρείτε την επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων 0 1 1 2 2 2 3 4 4 4 5 5 7 8. Είναι μοναδική;
b) Για τις παρατηρήσεις 0, 1, 2, 7, 8, 9 , βρείτε την επικρατούσα τιμή . Είναι μοναδική;

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 :

Ο πίνακας συχνοτήτων δίνει την κατανομή του χρόνου Χ (σε sec) 60 μαθητών που χρειάστηκαν, για να τρέξουν μια δεδομένη απόσταση.

x_i	ν_i
50	4
55	6
60	8
65	12
70	14
75	10
80	6

Να υπολογιστούν:

α) ο μέσος, ο διάμεσος και ο επικρατέστερος χρόνος για την κάλυψη της συγκεκριμένης απόστασης,

β) η τυπική απόκλιση

γ) σε πόσο χρόνο από της στιγμή της εκκίνησης κάλυψε την απόσταση το 25% των μαθητών.

Άσκηση 2 :

Έστω $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$ παρατηρήσεις με μέση τιμή χ και τυπική απόκλιση s_x.

α) Αν $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν προσθέσουμε σε καθεμιά από τις χ_1, $\chi_2, \ldots, \chi_\nu$ μια σταθερά c, να δειχτεί ότι:

i) $\bar{y} = \bar{x} + c$, **ii)** $s_y = s_x$

β) Αν $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$ επί μια σταθερά c, να αποδειχτεί ότι:

i) $\bar{y} = c\bar{x}$, **ii)** $s_y = |c| s_x$

Άσκηση 3 :

Έξι διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί έχουν μέση τιμή 15. Να βρείτε τους αριθμούς και τη διάμεσό τους.

Άσκηση 4 :

Έχουμε ένα δείγμα =10 παρατηρήσεων, όπου κάθε παρατήρηση μπορεί να είναι 1, 2 ή 3. Είναι δυνατό η μέση τιμή να είναι:

α) 1 β) 4 γ) 1,8

Άσκηση 5 :

Το μέσο ύψος 9 καλαθοσφαιριστών μιας ομάδας είναι 205 cm.

α) Για να "ψηλώσει" την ομάδα ο προπονητής πήρε έναν ακόμη παίκτη με ύψος 216 cm. Ποιο είναι το μέσο ύψος της ομάδας τώρα;

β) Εάν ήθελε να "ψηλώσει" την ομάδα στα 208 cm, πόσο ύψος έπρεπε να έχει ο καλαθοσφαιριστής που πήρε;

Άσκηση 6 :

Η μέση ηλικία 18 αγοριών και 12 κοριτσιών μιας τάξης είναι 15,4 χρόνια. Εάν η μέση ηλικία των αγοριών είναι 15,8 χρόνια, να βρείτε τη μέση ηλικία των κοριτσιών.

Άσκηση 7 :

Η επίδοση ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι 12, 10, 16, 18, 14.

α) Να βρείτε τη μέση επίδοση.

β) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 3, 1, 1 και 3, ποια θα ήταν η μέση επίδοση; Σε ποια μαθήματα έπρεπε να δώσει ιδιαίτερη προσοχή ο μαθητής;

Άσκηση 8 :

Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 6. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 5, 8, 9. Να βρείτε τους άλλους δύο.

Άσκηση 9 :

Για την κατανομή του βαθμού των Μαθηματικών της Β΄ τάξης των 40 μαθητών και μαθητριών της Γ΄ Λυκείου του πίνακα 4 να βρείτε:

α) τη μέση τιμή,

β) τη διάμεσο,

γ) την επικρατούσα τιμή,

δ) το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

Άσκηση 10 :

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό των επισκέψεων 40 μαθητών σε διάφορα μουσεία της χώρας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Επισκέψεις	Συχνότητα
[0-2)	8
2-4	12
4-6	10
6-8	6
8-10	4

Να υπολογιστούν:

α) η μέση τιμή,

β) η επικρατούσα τιμή,

γ) η διάμεσος,

δ) το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.